Лекции
по качественной теории
дифференциальных уравнений

Киев

2005

УДК 512.8
Лекции по качественной теории дифференциальных уравнений. Учебно-методическое пособие. Для студентов математических специальностей вузов.
Автор: Оболенский А.Ю.

Данное учебно-методическое пособие содержит краткий курс лекций по качественной теории дифференциальных уравнений.
Для студентов и аспирантов математических специальностей и преподавателей теории дифференциальных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Пора: перо покоя просит;
Я девять песен написал;
На берег радостный выносит
Мою ладью девятый вал –
Хвала вам, девяти каменам…
(*А.С. Пушкин*)

Предисловие

Эта книга написана на основе курса лекций, прочитанного студентам четвертого курса физико-математического факультета НТУУ «КПИ», которые учатся по специальности “математика”, то есть уже почти профессиональным математикам.

Цель курса автор видит в демонстрации единства различных, уже прочитанных студентам дисциплин. По возможности приходится обращаться и к функциональному анализу и к теории функций комплексного переменного и к простейшим вопросам алгебраической и дифференциальной топологии.

Отбор материала для такого курса достаточно сложен и обосновать его трудно. Практически не затронуты вопросы гиперболической теории, нет даже и намека на краевые задачи, не обсуждается устойчивость по Ляпунову.

Некоторые из этих вопросов рассматриваются в иных обязательных и специальных курсах, иные не рассматриваются вовсе. Рассмотренные вопросы близки, но не совпадают с кругом основных профессиональных интересов автора и автор стремился к тому, чтобы дать как можно более широкое видение проблем дифференциальных уравнений. Все рассматриваемые вопросы носят совершенно классический характер, были лишь подобраны наиболее простые, с точки зрения автора, доказательства, которые имеют образовательное значение.

Не имея даже и мысли сравнивать этот скромный труд с бессмертным «Евгений Онегиным», представляется очевидным, что изложенным материалом должен владеть каждый, занимающийся математикой профессионально. Рассмотренные вопросы -«камены» математического образования. Автор искренне признателен за любые замечания и пожелания, возникающие у читателя.

ГЛАВА 0

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Топологические пространства

0.1.1. Упорядоченные множества

Под частично упорядоченным множеством *I* понимаем множество с введенным отношением $\leq$, удовлетворяющее условиям:

$$\alpha \leq \alpha,$$

$$\alpha \leq \beta \quad \text{и } \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma,$$

$$\alpha \leq \beta \quad \text{и} \quad \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta,$$

где α, β, γ - произвольные элементы множества *I*.

Под направленным множеством понимаем частично упорядоченное множество для любых двух элементов $\alpha, \beta \in I$ найдется такой элемент $\gamma \in I$,что $\alpha \leq \gamma$ и $\beta \leq \gamma$. Элемент α_0 называется ***наименьшей верхней гранью*** (***мажорантой***) множества $J \subset I$, если для любого $\beta \in J$ выполнено $\beta \leq \alpha_0$ и $\alpha_0 \leq \alpha$, где α - произвольная мажоранта множества *J*. Говорят, что $\leq$ есть ***совершенное*** (***линейное***) упорядочение в *I*, если для любых двух элементов $\alpha, \beta \in I$ либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$. Множество *I*, наделенное отношением совершенного порядка, называют ***совершенно линейно упорядоченным*** или ***цепью***.

Упорядоченное множество *I* называют ***индуктивным***, если каждое его совершенное подмножество *J* обладает в *I* верхней гранью.

Пусть S некоторая система подмножеств данного множества *X*. Важным примером отношения порядка в S является отношение $A \leq B$, определяемое условиями: $A \in S, B \in S$ и $A \subset B$. При этом говорят, что S упорядочено ***по включению***. Если $Y \subset S$ и объединение $\cup\{A : A \in Y\}$ принадлежит *S*, то верхняя грань sup*Y* существует и равна этому объединению. Противоположное отношение порядка, при котором $A \leq B$ означает $A \supset B$, называют упорядочением ***по убыванию***. Такой порядок естественен, например, в множестве окрестностей некоторой точки в топологическом пространстве. Элемент $\alpha \in I$ называется ***максимальным***, если в *I* нет такого элемента β, что $\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$.

Лемма Цорна. Для каждого элемента $\beta \in I$ индуктивно упорядоченного множества *I* существует такой максимальный элемент $\alpha \in I$, что $\beta \leq \alpha$.

Лемма Цорна часто заменяет рассуждения , основанные на таких принципах, как принцип трансфинитной индукции, аксиома выбора, теорема Цермело о вполне упорядоченности.

0.1.2. Сети

Сетью или ***обобщенной последовательностью*** называют семейство элементов, множество индексов которого направлено. Каждая последовательность при стандартном упорядочении натуральных чисел есть сеть. Сеть $(y_\beta)_{\beta\in J}$ называется ***подсетью*** сети $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, если для каждого элемента $\alpha \in I$ существует такой индекс $\beta_\alpha \in J$, что соотношения $\beta' \in J$ и $\beta' \geq \beta_\alpha$ влекут за собой равенство $y_{\beta'} = x_{\alpha'}$ для некоторого $\alpha' \geq \alpha$. Подсеть обобщает понятие подпоследовательности. Однако, последовательность может обладать подсетями, которые не являются последовательностями.

п.0.1.3. Предварительные сведения из общей топологии

Общую или теоретико – множественную топологию можно охарактеризовать как абстрактное изучение понятия близости и непрерывности. Для этого надо отыскать в элементарной геометрии те свойства близости, которые представляются основными и принять их за аксиомы. Пусть X - множество. Под ***топологией*** в *X* понимают некоторую систему $\Im$ подмножеств из *X*, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $\varnothing$ и *X* принадлежат $\Im$;

(2) если U_1 и U_2 принадлежат $\Im$, то и пересечение $U_1 \cap U_2$ принадлежит $\Im$;

(3) объединение любого семейства множеств из $\Im$ принадлежит $\Im$.

Элементы из $\Im$ называются открытыми множествами (в, для) топологии $\Im$. Пара $(X, \Im)$, в которой *X*- множество, $\Im$- топология в *X*, называется ***топологическим пространством. Базой*** топологии $\Im$ понимают такую подсистему множеств $\tilde{A}$ в $\Im$, что каждый элемент из $\Im$ является объединением некоторого подмножества элементов из $\tilde{A}$.

Окрестностью точки $x \in X$ называется любое подмножество из X, в котором содержится открытое множество, содержащее x. Аналогично окрестностью множества $A \subset X$ называется всякое подмножество из *X*, которое содержит открытое множество, содержащее *A*.

Наиболее удобный путь определения *топологических векторных пространств* - это задание их топологии в терминах системы окрестностей каждой точки. Составной частью определения топологического векторного пространства является наличие связи между его векторной и топологической структурами. Благодаря этой связи система окрестностей каждой точки является сдвигом системы окрестностей нуля.

Рассмотрим способ *задания топологии* $\Im$ *с помощью системы окрестностей*.

Пусть X –множество. Допустим, что задано множество $\Re$ упорядоченных пар (x,N), где $x \in X$, а N – подмножество в X, содержащее x. Предположим, что $\Re$ удовлетворяет следующим условиям:

(a) $(x, X) \in \Re$ для каждого элемента $x \in X$;

(b) если $(x, N') \in \Re$ и $(x, N'') \in \Re$, то $(x, N' \cap N'') \in \Re$;

(c) если $(x, N) \in \Re$ и $X \supset N' \supset N$, то $(x, N') \in \Re$;

(d) если $(x, N) \in \Re$, то существует такое множество N', что $(x, N') \in \Re$ и $(x', N) \in \Re$ для каждого элемента $x' \in N'$.

Система $\Im$, состоящая из всех таких подмножеств $U \subset X$, что для элемента $x \in U$ пара (x,U) принадлежит $\Re$, является топологией в X.

Кроме того, окрестности точки x в этой топологии $\Im$ - это все те множества N, для которых $(x, N) \in \Re$.

Множество $A \subset X$ называется ***замкнутым*** в заданной топологии, если множество $X \backslash A$ открыто. Из этого определения вытекают следующие свойства замкнутых множеств:

(а) $\varnothing$ и X – замкнутые множества;

(б) любое пересечение замкнутых множеств замкнуто;

(в) объединение двух замкнутых множеств замкнуто.

Топологию можно задавать системой замкнутых множеств, которые должны удовлетворять условиям (а)-(в).

Замыкание $\overline{A}$ множества A топологического пространства X - это наименьшее замкнутое множество, содержащее A, т.е. $\overline{A}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Множество A (***всюду***) ***плотно*** в X, если $\overline{A} = X$.

Внутренность множества A, обозначаемую через $\overset{\circ}{A}$ или int$A$, можно определить как множество $X \setminus \overline{X \setminus A}$. ***Границей*** ($\partial A$) подмножества A топологического пространства X множество всех тех точек из X, которые принадлежат одновременно замыканию множества A и $\overline{X \setminus A}$, т.е. $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Пусть $\Im$ и $\Im'$ две топологии в множестве X. Говорят, что топология $\Im$ ***слабее*** топологии $\Im'$ или, что топология $\Im'$ ***сильнее*** топологии $\Im$, если $\Im \subset \Im'$, т.е. если каждое $\Im$- открытое множество является также и $\Im'$- открытым множеством.

Пусть $(X, \Im)$ - топологическое пространство, Y – подмножество в X. ***Индуцированной топологией*** в Y - подмножество в X называется топология, в которой открытыми множествами по определению являются пересечения в Y с $\Im$- открытыми множествами из X. Индуцированная топология в Y обозначается через $\Im|Y$.

Топологическое пространство называется ***отделимым*** или ***хаусдорфовым***, если любые две различные точки x и y из X имеют непересекающиеся окрестности.

0.1.4. Непрерывные отображения

Задание топологии позволяет ввести понятие непрерывного отображения топологических пространств. Пусть X и Y топологические пространства и f – отображение пространства X в Y. Отображение f называется ***непрерывным***, если множество $f^{-1}(V)$ открыто в X всякий раз, когда V открыто в Y. Отображение f называется ***непрерывным в точке*** $x \in X$, если $f^{-1}(V)$ есть окрестность точки x всякий раз, когда V окрестность точки $f(x)$ или, что то же, когда V принадлежит некоторой базе окрестностей точки $f(x)$.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***инъективным,*** если для любых $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***сюръективным***, если для любой точки $y \in Y$ найдется такой элемент $x \in X$, что $f(x)=y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***биективным***, если оно инъективно и сюръективно одновременно. Отображение $f : X \to Y$ называется ***гомеоморфизмом*** пространства, если оно инъективно, непрерывно и отображение f^{-1} непрерывно, как отображение подпространства $f(X)$ пространства Y в X. Если отображение $f : X \to Y$ биективно, непрерывно, и отображение f^{1} непрерывно, то отображение f называется ***гомеоморфизмом*** пространства X ***на*** Y .Топологические пространства X и Y называются ***гомеоморфными***, если существует хотя бы один гомеоморфизм пространства X на Y.

0.1.5. Сети в топологическом пространстве

Рассмотрим понятие *сходимости* и связанные с ним свойства, которыми может обладать или не обладать сеть точек топологического пространства *X*. Если (x_α) - сеть точек из X и A – множество в *X*, то будем говорить, что

(1) сеть (x_α) в ***конечном счете попадает*** в множество *A*, если существует такой индекс α_0, что $x_\alpha \in A$ для каждого индекса $\alpha \geq \alpha_0$;

(2) сеть (x_α) ***часто бывает*** в множестве *A*, если для каждого индекса α существует такой индекс $\alpha' \geq \alpha$, что $x_{\alpha'} \in A$.

Говорят, что сеть (x_α) ***сходится*** к точке *x*, или что *x* есть ***предел*** сети (x_α), если (x_α) в конечном счете попадает во всякую окрестность U точки *x*. Записывается это в виде $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$ или $x_\alpha \to x$ при возрастании α.

Точка $x \in X$ называется ***предельной точкой*** или ***точкой накопления*** для сети (x_α). Если x_α часто бывает во всякой окрестности U точки *x*.

Последующие предложения хорошо известны для последовательностей и вытекают из определений.

(а) Если сеть (x_α) сходится к точке *x*, то и любая ее подсеть (y_β) также сходится к этой точке.

(б) Точка $x \in X$ является предельной точкой для сети (x_α) тогда и только тогда, когда существует подсеть (y_β) сети (x_α) сходящаяся к точке *x*.

(в) Точка $x \in X$ принадлежит замыканию $\overline{A}$ множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда существует сеть точек из *A*, сходящаяся к *x*, либо существует сеть точек из *A*, для которой *x* есть предельная точка.

(г) Топологическое пространство *X* хаусдорфово тогда и только тогда, когда каждая сходящаяся сеть имеет не более одного предела в *X*.

(д) Отображение $f : X \to Y$ (*X* и *Y* топологические пространства) непрерывно в точке *x* тогда и только тогда, когда сеть $(f(x_\alpha))$ сходится к *f*(*x*) для любой сети (x_α) из *X*, сходящейся к *x*.

0.1.6. Произведение пространств и произведение топологий

Одна из важных конструкций построения топологических пространств это произведение пространств.

Пусть каждому элементу α из некоторого множества индексов *A* поставлено в соответствие некоторое топологическое пространство X_α. ***Произведение***

$X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ множеств X_α определяется как множество всех функций, заданных на множестве A , таких , что $f(\alpha)\in X_\alpha$ для каждого $\alpha\in A$. Говорят, что $f=\prod_{\alpha\in A} f(\alpha)$ и называют $f(\alpha)$ α- координатой функции f. Отображение $\pi_\alpha:\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\alpha$, для которого $\pi_\alpha(x)=x_\alpha$, $x\in\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, называют α - проекцией. Топологию в пространстве $X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ определим как слабейшую топологию, в которой все отображения π_α непрерывны. База такой топологии задается системой множеств вида $U=\cap\{\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha):\alpha\in A\}$, где множество V_α открыто в X_α и $V_\alpha=X_\alpha$ для всех α , кроме, быть может, некоторого конечного набора индексов.

Отображение $f:S\to\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ некоторого топологического пространства S непрерывно тогда и только тогда, когда каждое из отображений $\pi_\alpha(f):S\to X_\alpha$ непрерывно. Если каждый из сомножителей X_α хаусдорфово пространство, то тем же свойством обладает и произведение пространств.

Стандартная топология пространства R^n (соответственно C^n) — это произведение обычных топологий пространства R (соответственно C).

п.0.1.7. Бикомпактные пространства

Покрытием множества X называют систему Σ (или иногда семейство A_i) подмножеств в X, объединение которых содержит X. Покрытие Σ' называется ***подпокрытием*** покрытия Σ, если каждое из множеств системы Σ' принадлежит Σ.

Покрытие Σ топологического пространства X называется ***открытым***, если каждое множество из Σ открыто в X.

Систему Σ (или семейство A_i) подмножеств множества X называют ***центрированной***, если каждая непустая конечная подсистема в Σ (или конечное подсемейство в A_i) имеет непустое пересечение.

Пусть X - топологическое пространство. Следующие четыре утверждения эквивалентны.

(a) Каждое открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие.

(б) Если система Σ (или семейство A_i) замкнутых множеств пространства *X* центрирована, то пересечение всех множеств системы Σ (или семейства A_i) непусто.

(в) Каждая сеть точек из *X* имеет в *X* предельную точку.

(г) Каждая сеть точек из *X* содержит сходящуюся подсеть.

Эквивалентность предложений (а) и (б) получается посредством перехода к дополнениям и использования формул де Моргана. Эквивалентность утверждений (в) и (г) устанавливается ссылкой на утверждение (б) из п.0.1.5.. Остается доказать равносильность утверждений (б) и (в). Пусть (x_α) - сеть точек из *X*. Рассмотрим замкнутые множества $F_\alpha = \{x_{\alpha'} : \alpha' \geq \alpha\}$. Так как индекс α пробегает направленное множество, то система (F_α) центрирована, и, следовательно, если верно (б), то существует точка *x*, принадлежащая всем F_α. Легко проверяется, что *x* - предельная точка сети (x_α). Таким образом, (б) влечет (в). Обратно, допустим, что выполняется условие (в), и пусть (F_α) - центрированная система замкнутых множеств в *X*. Обозначим через *L* множество индексов α, а через *I* множество всех конечных подмножеств в *L*. Множество *I*, упорядочено по включению и направлено. По условию каждому $i \in I$ соответствует точка x_i, принадлежащая пересечению $P_i = \cap\{F_\alpha : \alpha \in i\}$. Из (в) вытекает, что сеть (x_i) обладает предельной точкой $x \in X$. Так как каждое множество P_i - замкнуто и $P_{i'} \subset P_i$ при $i' \supset i$, то точка $x \in P_i$ для каждого i и, следовательно, $x \in \cap\{F_\alpha : \alpha \in L\}$. Таким образом, (в) $\Rightarrow$ (г), что и требовалось доказать.

Топологическое пространство *X* называется ***бикомпактным***, если оно обладает одним (и, следовательно, каждым) из указанных выше свойств (а) - (г) и хаусдорфово.

Подножество *A* топологического пространства *X* называется *бикомпактным*, если оно является бикомпактным пространством в индуцированной топологии. Множество *A* называется *относительно бикомпактным* (в *X*), если его замыкание *A* бикомпактно.

Легко видеть, что замкнутое множество в бикомпактном пространстве бикомпактно и бикомпактное множество в отделимом пространстве замкнуто.

Теорема Больцано — Вейерштрасса (из курса математического анализа) утверждает, что в пространствах R^n или C^n бикомпактны те и только те множества, которые замкнуты и ограничены.

0.1.8. Теорема Тихонова

Приводимый ниже результат является, по-видимому, самым существенным в теории бикомпактных пространств.

Теорема Тихонова. *Топологическое произведение семейства бикомпактных пространств есть бикомпактное пространство.*

Доказательство. Пусть $(X_i)_{i\in I}$ - семейство бикомпактных пространств и X - его произведение. Достаточно показать, что если Σ — центрированная система множеств в X, то пересечение $\cap\{\overline{A}: A\in\Sigma\}$ непусто. Не нарушая общности, можно считать, что Σ - максимальная центрированная система множеств, ибо, пользуясь леммой Цорна, любую центрированную систему можно расширить до максимальной. Из условия максимальности системы Σ вытекают следующие два утверждения:

(а) система Σ замкнута относительно конечных пересечений;

(б) всякое множество в X, пересекающее каждое множество системы Σ, само принадлежит системе Σ.

При каждом фиксированном i система $\pi_i(\Sigma)$ подмножеств пространства X_i центрирована. Бикомпактность пространства X_i влечет существование точки $x_i \in X_i$, являющейся точкой прикосновения (точка x называется ***точкой прикосновения*** множества A, если x принадлежит замыканию A каждого из множеств системы $\pi_i(\Sigma)$. Поэтому, если U_i - некоторая окрестность точки x_i, то пересечение $U_i \cap \pi_i(A)$ непусто для любого множества $A\in\Sigma$. Другими словами, множество $\pi_i^{-1}(U_i)$ пересекает каждое множество системы Σ. В силу утверждения (б) множество $\pi_i^{-1}(U_i)$ принадлежит системе Σ, а из (а) следует, что это верно для любого конечного пересечения таких множеств. Однако совокупность конечных пересечений множеств вида $\pi_i^{-1}(U_i)$ образует базу окрестностей точки $x=(x_i)$ в топологии произведения X. Таким образом, каждая окрестность точки x принадлежит системе Σ, т.е. x является точкой прикосновения любого множества системы Σ. Теорема доказана.

§ 2. Метрические пространства

0.2.1. Определение и основные свойства

Множество M называется метрическим пространством, если введена функция $d: M\times M \to R$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $d(x,y)\geq 0$, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2. $d(x,y)=d(y,x)$;

3. $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$ (неравенство треугольника), $x,y,z \in M$.

Открытым шаром с центром в точке x_0 называют множество точек метрического пространства $B(x_0,r)=\{x \in M : d(x,x_0)<r\}$.

Замкнутым шаром с центром в точке x_0 называют множество точек $\overline{B}(x_0,r)=\{x \in M : d(x,x_0) \le r\}$.

Сферой радиуса *r* называют $s(x_0;r)=\{x \in M : d(x,x_0)=r\}$.

Если X - метрическое пространство, то из свойств 1)-3) следует, что множество пар (x, $B(x,r)$), где $x \in M$ и $r>0$, удовлетворяет требованиям a)-d) п.0.1.2.. Поэтому существует единственная топология $\Im_d$ в *M*, в которой открытые шары образуют базу окрестностей каждой точки $x \in M$. Так как $B(x,r) \subset \overline{B(x,r)} \subset B(x,r_1)$ при $r_1>r>0$, то замкнутые шары с центром в точке x и положительным радиусом также образуют базу окрестностей точки x. Каждый открытый (замкнутый) шар является открытым (замкнутым) множеством в топологии $\Im_d$. Топология $\Im_d$ отделима.

Сеть (x_α) точек метрического пространства называется фундаментальной или сетью Коши, если $d(x_\alpha,x_{\alpha'}) \to 0$, когда α и α' возрастают независимо друг от друга. Если $\lim\limits_\alpha x_\alpha = x$, то (x_α) есть сеть Коши.

Всякая сеть Коши (x_α) сходится к каждой своей предельной точке (если такие существуют). Не всякая сеть Коши сходится. (Достаточно рассмотреть незамкнутое подпространство метрического пространства.)

Метрическое пространстве (X, d) называется ***полным***, если в нем каждая сеть Коши сходится. Замкнутое подпространство полного пространства полно. Всякое полное подпространство метрического пространства замкнуто.

Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда каждая его *последовательность* Коши сходится к некоторой точке этого пространства.

Понятие последовательности Коши можно ввести в, так называемых, равномерных топологических пространствах. Топологические пространства, удовлетворяющие условию, согласно которому каждая его *последовательность* Коши сходится к некоторой точке этого пространства, называются ***секвенциально полным.*** Существуют неполные равномерные пространства, которые все же являются секвенциально полными.

Теорема Коши состоит в том, что действительная прямая есть полное метрическое пространство, если $d(x,y)=|x-y|$.

Задача. Доказать, что функции $d(x,y)=|arctg(x)-arctg(y)|$, $d(x,y)=|arctg(x-y)|$, $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ есть метрики на *R*. Будет ли действительная прямая в этих метриках полным метрическим пространством?

0.2.2. Отображения, удовлетворяющие условию Липшица

Пусть M - метрическое пространство. Будем говорить, что отображение $f:M\to M$ удовлетворяет ***условию Липшица***, если существует положительное число K такое, что для любых точек $x,y\in M$ выполняется неравенство $d(f(x),f(y))\le Kd(x,y)$.

Наименьшее из таких чисел *K* мы будем называть точной константой Липшица отображения f и обозначать *Lip* (*f*).

Үсловие Липшица можно рассматривать как своего рода слабое условие гладкости, лежащее между равномерной непрерывностью и существованием равномерно ограниченного дифференциала. Самое известное утверждение об отображениях, удовлетворяющих условию Липшица, состоит в следующем.

Теорема. (принцип сжатых отображений**).** Пусть *M* - полное метрическое пространство, $f:M\to M$ - отображение, удовлетворяющее условию Липшица, и $\lambda=Lip(f)<1$. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку x_0, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)=x_0$ для любой точки $x\in M$.

Доказательство. Докажем, что для любой точки $x\in M$ последовательность $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна. Действительно, при $m>n$ имеем

$$d(f^n(x),f^m(x))\le\lambda^n d(x,f^{m-n}(x)\le$$
$$\le\lambda^n(d(x,f^1(x))+d(f^1(x),f^2(x))+...+d(f^{m-n-1}(x),f^{m-n}(x)))\le$$
$$\le\lambda^n d(x,f(x))(1+\lambda+\lambda^2+...+\lambda^{m-n-1})\le\lambda^n d(x,f(x))\frac{1}{1-\lambda}.$$

Так как $0<\lambda<1$, то при достаточно большом n полученная величина сколь угодно мала. Таким образом, в силу полноты *M*, последовательность $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)=x_0$. Тогда в силу непрерывности отображения *f* имеем $f(x_0)=f(\lim\limits_{n\to\infty}(f^n(x)))=\lim\limits_{n\to\infty}(f^{n+1}(x))=x_0$.

Итак, существование неподвижной точки доказано.

Докажем единственность. Если $f(x)=x$ и $f(y)=y$, то из неравенства $d(f(x),f(y))\leq\lambda d(x,y)$ следует $d(x,y)\leq\lambda d(x,y)$. Так как $0<\lambda<1$, то $d(x,y)=0$ и $x=y$.

Задача. Показать на примере, что отображение f, удовлетворяющее неравенству $d(f(x),f(y))<d(x,y)$, может не иметь ни одной неподвижной точки.

Задача. Доказать, что отображение $f:M\to M$, где M- бикомпактное метрическое пространство, удовлетворяющее неравенству $d(f(x),f(y))<d(x,y)$, имеет одну неподвижную точку.

Следствие. Пусть $f:M\times Y\to M$ - множество липшицевых отображений полного метрического пространства M в себя, которые неперервно зависят от параметра a, принадлежащего топологическому пространству Y и $Lip(f(x,a))\leq\lambda<1$, где λ не зависит от $a\in Y$.

Тогда единственная неподвижимая точка $x_0(a)$ неперерывно зависит от $a\in Y$.

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$
\begin{aligned}
d(x_0(a_1),x_0(a_2)) &= d(f(x_0,a_1),f(x_0,a_2))\leq\\
&\leq d(f(x_0(a_1),a_1)),f(x_0(a_2),a_1))+d(f(x_0(a_2),a_2)),f(x_0(a_2),a_1))\leq\\
&\leq\lambda d(x_0(a_1),x_0(a_2)))+d(f(x_0(a_2),a_2)),f(x_0(a_2),a_1))\ .
\end{aligned}
$$

Таким образом, $(1-\lambda)d(x_0(a_1),x_0(a_2)))\leq d(f(x_0(a_2),a_2)),f(x_0(a_2),a_1))$.

Из полученного неравенства и непрерывной зависимости $f(x,a)$ от параметра a, утверждение следствия доказано.

0.2.3. Теорема Бэра

Теорема (Бэра). Пусть M –полное метрическое пространство, и пусть U_i - последовательность открытых множеств, плотных в M. Тогда их пересечение $A=\bigcap\limits_{i\geq0}U_i$ (которое теперь не должно быть открытым) плотно в M.

Доказательство. Пусть Q - произвольное открытое множество из M. Нам надо доказать, что $Q\cap A$ не пусто. Поскольку множество U_0 плотно и $Q\cap U_0$, то существует некоторый замкнутый шар $B_0=\overline{B(a_0,r_0)}$, полностью содержащийся в $Q\cap U_0$. Повторим теперь эту операцию, заменив U_0 на U_1 и Q на открытый шар $\overset{\circ}{B}_0$. Тогда найдется некоторый замкнутый шар $B_1=\overline{B(a_1,r_1)}$, полностью лежащий в $\overset{\circ}{B}_0\cap U_1$. При этом выберем $r_1<1$. Продолжая так далее, мы сможем построить последовательность точек a_n и последовательность чисел

$r_n < 1/n$, такие, чтобы каждый замкнутый шар $B_n = \overline{B(a_n, r_n)}$ содержался в открытом шаре $\overset{\circ}{B}_{n-1} = \overset{\circ}{B}_{n-1}(a_{n-1}, r_{n-1})$ и в U_n. Все эти замкнутые шары лежат в Q. Последовательность центров шаров a_n является последовательностью Коши. В самом деле, все точки a_{n+p} при $p \geq 0$ содержатся в замкнутом шаре B_n и поэтому $d(a_{n+p}, a_n) \leq 1/n$. Поскольку пространство M полно, последовательность точек a_n сходится к некоторой предельной точке a. Так как все точки a_{n+p} при $p \geq 0$ содержатся в шаре B_n, то точка a заведомо лежит в B_n, а, следовательно, и в $Q \cap U_n$. Поскольку это верно для любого n, то $a \in Q \cap A$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Часто оказывается удобным пользоваться этой теоремой переходя к дополнениям:

Пусть M — полное метрическое пространство и F_n — последовательность замкнутых множеств с пустой внутренностью. Тогда объединение $F = \bigcup\limits_{n \geq 0} F_n$ (*которое не обязано быть замкнутым*) *имеет пустую внутренность*. (*в частности,* $F \neq M$).

Совершенно ясно, что неполное метрическое пространство этим свойством не обладает. Например, поле Q рациональных чисел с обычной метрикой является объединением счетного числа множеств, сводящихся к одной точке; каждая точка замкнута в Q и имеет пустую внутренность.

Задача. (теорема Вейерштрасса) На отрезке [0,1] существует непрерывная вещественная функция $f(t)$, которая ни в одной точке t_0 отрезка [0,1/2] не имеет конечной производной.

Задача. Привести пример непустых, замкнутых, вложенных, выпуклых множеств в полном метрическом векторном пространстве, пересечение которых пусто.

§ 3. Банаховы пространства

п.0.3.1. Определение и основные свойства

Пусть задано векторное пространство X над полем вещественных или комплексных чисел. Векторное пространство называется нормированным, если введена функция $\|\circ\| : X \to R$, которая называется нормой и эта функция обладает следующими свойствами:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$ где $x \in X$;

2. $\|\alpha\| = |\alpha|\|x\|$, где $\alpha \in R$ или $\alpha \in C$;

3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, где $x, y \in X$.

Норма превращает векторное пространство в метрическое, если положить $d(x,y) = \|x-y\|$.

Полное нормированное пространство называется ***банаховым пространством*** (B-пространством).

Свойства нормы:

1. $\left|\|\overline{x}\| - \|\overline{y}\|\right| \le \|\overline{x} - \overline{y}\|$.

Доказательство: Из неравенства $\|\overline{x}\| = \|\overline{x} - \overline{y} + \overline{y}\| \le \|\overline{x} - \overline{y}\| + \|\overline{y}\|$ и аксиомы 3 следует, что: $\|\overline{x} - \overline{y}\| \ge \|\overline{x}\| - \|\overline{y}\| \ge -\|\overline{x} - \overline{y}\|$, что эквивалентно приведенному неравенству.

Топология в векторном нормированном пространстве, задаваемая функцией $d(x,y) = \|x-y\|$ называется ***сильной***, соответствующая сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ обозначается $s - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Термин “сильная”сходимость вводится, чтобы отличить этот вид предельного перехода от “слабой” сходимости, которая будет определена позже.

Множество $M \subset E$ называется **выпуклым**, если для любых $x, y \in M \Rightarrow$ $\alpha x + \beta y \in M$, где $\alpha + \beta = 1, \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha, \beta \in R$.

Множество M называется **уравновешенным или центрально - симметричным**, если из того, что $x \in M$ следует, что $-x \in M$.

Множество M называется **поглощающим**, если для любого $x \in E$ найдется $\alpha > 0$ такое, что $\alpha x \in M$.

Поглощающее, выпуклое, уравновешенное множество M называется **ограниченным**, если для всех $x \in M$ множество тех α из R, что $\alpha x \in M$, ограничено, аналогично равномерно ограничено.

Поглощающее, выпуклое, уравновешенное ограниченное множество M называется **замкнутым**, если для всех $\overline{x} \in M$ множество тех α из R, что $\alpha x \in M$ замкнутый отрезок.

Теорема: Множество $\overline{B_1} = \{\overline{x} \in U : \|\overline{x}\| \le 1\}$ (единичный шар) – выпуклое, уравновешенное, ограниченное множество.

Доказательство: Пусть $x \in \overline{B_1}$, $y \in \overline{B_1}$, тогда для любых $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ имеем: $\|\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}\| \le \|\alpha \bar{x}\| + \|\beta \bar{y}\| = \alpha\|\bar{x}\| + \beta\|\bar{y}\| \le \alpha + \beta = 1$.

Уравновешенность множества $\overline{B_1}$ следует из того, что $\|\bar{x}\| = \|-\bar{x}\|$.

Верно, и обратное: Любое выпуклое, уравновешенное, поглощающее и ограниченное множество *M* может быть единичным шаром в некоторой норме. Эта норма может быть определена таким способом:

$$\|\bar{x}\| = \inf\{r > 0 : (\bar{x}/r) \in M, r \in R).$$

Свойства введенной нормы:

1. Норма любого вектора больше или равна нулю, в связи с тем, что множество *M* поглощающее: $\|\bar{x}\| \ge 0$, $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

2. Пусть $\bar{y} = t\bar{x}$, $t > 0$, тогда:

$$\|\bar{y}\| = \inf\{r > 0 : \frac{tx}{r} \in M\} = \inf\{tr_1 = r > 0 : \frac{x}{r_1} \in M\} = t\|\bar{x}\|.$$

3. Неравенство треугольника:

Зададим два произвольных вектора $x \in E, y \in E$ и найдем r_1, r_2 такие, что $\frac{x}{r_1} \in M$, $r_1 < \|x\| + \varepsilon$, и $\frac{y}{r_2} \in M$, $r_2 < \|y\| + \varepsilon$, $r_1 > 0, r_2 > 0$. Таким образом, в силу выпуклости множества, имеем

$$\frac{r_1}{r_1 + r_2} \times \frac{x}{r_1} + \frac{r_2}{r_1 + r_2} \times \frac{y}{r_2} = \frac{x + y}{r_1 + r_2} \in M \Rightarrow \|x + y\| \le r_1 + r_2.$$

В связи с произвольностью $\varepsilon > 0$ неравенство треугольника доказано.

Таким образом, любое выпуклое, уравновешенное, поглощающее, ограниченное множество может быть единичным шаром в некоторой норме.

Задача. Доказать что $3 \le \pi \le 4$. Привести примеры, когда $\pi = 3, \pi = 4$. Заметим, что π - отношение длины окружности к её диаметру в соответствующей норме. (Ю. Г. Решетняк)

Задача. Найти π, если норма на двумерном пространстве задана формулой $\|\{x_1, x_2\}\| = |x_1| + |x_2| + |x_2 - ax_1|$, где $a \ge 0$. (Ответ: $\pi = 3 + \frac{|a-1|}{a+1}$.)

Норма называется ***евклидовой***, если выполнено тождество:

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$, то есть, выполнено тождество параллелограмма.

Полное векторное нормированное пространство с евклидовой нормой называется ***гильбертовым.***

Задача. Проверить будет ли $\|\{x_1, x_2\}\| = |x_1| + |x_2|$ евклидовой нормой.

В вещественном гильбертовом пространстве *E* функция двух переменных

$$(x, y) = 4^{-1}(\|x+y)\|^2 - \|x-y)\|^2),$$

называемая ***скалярным произведением***, обладает следующими свойствами:

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\alpha \in R),$$

$$(x+y, z)=(x, z)+(y, z),$$

$$(x, y)=(y, x),$$

$$(x, x) = \|x\|^2.$$

В комплексном нормированным линейном гильбертовом пространстве *X* функция

$$(x, y) = (x, y)_1 + i(x, iy)_1,$$

где i^2 =-1, $(x, y)_1 = 4^{-1}(\|x+y)\|^2 - \|x-y)\|^2)$, обладает следующим свойствам:

$$(x, x) = \|x\|^2,$$

$$((\alpha+\beta)x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) \quad (\alpha, \beta \in C),$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

(черта означает комплексно сопряженное число). Так введенная функция называется ***скалярным произведением***.

0.3.2. Теорема Хана -Банаха

Пусть *X*- вещественное линейное пространство. Отображение $f: X \to R$ называется ***линейным функционалом*** или ***линейной функцией***, если

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ для любых } \alpha, \beta \in R, x, y \in X.$$

Вопрос о существовании нетривиальных непрерывных линейных функционалов в общем локально выпуклом линейном топологическом пространстве решается с помощью теоремы Хана - Банаха о продолжении функционала.

Теорема . Пусть *X* - вещественное линейное пространство и $p(x)$ - вещественная функция, заданная на *X* и удовлетворяющая следующим условиям:

$p(x+y) \le p(x) + p(y)$ (полуаддитивность), (1)

$p(\alpha x) = \alpha p(x)$ для $\alpha \geq 0$. (2)

Пусть M - вещественное линейное подпространство в X и f_0 - вещественный линейный функционал, заданный на M:

$f_0(\alpha x + \beta y) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(y)$ для $x, y \in M$ и вещественных α, β. (3)

Пусть f_0 удовлетворяет неравенству $f_0(x) \leq p(x)$ на M. Тогда существует вещественный линейный функционал F, определенный на X, такой, что

1) F служит продолжением f_0, т. е. $F(x) = f_0(x)$ для всех $x \in M$;

2) $F(x) \leq p(x)$ на X.

Доказательство. Предположим сначала, что пространство X натянуто на M и некоторый элемент $x_0 \notin M$ т.е. $X = \{x = m + \alpha x_0; m \in M, \alpha$ вещественные числа$\}$.

Так как $x_0 \notin M$, представление элементов $x \in X$ в виде $x = m + \alpha x_0$ определяется однозначно. Следовательно, полагая $F(x) = F(m + \alpha x_0) = f_0(m) + \alpha c$, где c - произвольное вещественное число, мы получим вещественный линейный функционал F на X, являющийся продолжением f_0. Мы должны теперь выбрать c таким, что $F(x) \leq p(x)$ т.е. $f_0(m) + \alpha c \leq p(m + \alpha x_0)$. Последнее неравенство эквивалентно следующим двум условиям:

$$f_0(\frac{m}{\alpha}) + c \leq p(x_0 + \frac{m}{\alpha}) \qquad \text{для } \alpha > 0,$$

$$f_0(-\frac{m}{\alpha}) - c \leq p(-x_0 - \frac{m}{\alpha}) \qquad \text{для } \alpha < 0.$$

Чтобы выполнялись эти условия, мы выберем c так, что

$$f_0(m') - p(m - x_0) \leq c \leq p(m'' + x_0) - f(m'')$$

для всех $m', m'' \in M$. Такой выбор возможен, поскольку

$$f_0(m') + f_0(m'') = f_0(m' + m'') \leq p(m' + m'') =$$
$$= p(m' - x_0 + m'' + x_0) \leq p(m' - x_0) + p(m'' + x_0).$$

Итак, остается лишь выбрать c между двумя числами

$$\sup_{m' \in M}[f_0(m') - p(m' - x_0)] \text{ и } \inf_{m'' \in M}[p(m'' + x_0) - f_0(m'')].$$

Рассмотрим теперь семейство всех вещественных линейных продолжений g функционала f_0, для которых при всех x из области определения g выполняется неравенство $g(x) \leq p(x)$. Мы можем частично упорядочить это семейство, полагая $h \geq g$, если функционал h служит продолжением g. Тогда по лемме Цорна существует максимальное линейное продолжение g функционала f_0, для которого неравенство $g(x) \le p(x)$ выполняется при всех x из области определения g. Остается показать, что область определения $D(g)$ функционала g совпадает с пространством X. Если бы это было не так, мы могли бы, приняв $D(g)$ за подпространство M, а сам функционал g за f_0, построить продолжение F функционала g, удовлетворяющее неравенству $F(x) \le p(x)$ для всех x из области определения F. Но это противоречит максимальности линейного продолжения g.

Следствие. Пусть X – нормированное пространство, M - его линейное подпространство, а f_1 непрерывный линейный функционал, заданный на M. Тогда существует определенный на всем пространстве X непрерывный линейный функционал f, такой , что

1) f служит продолжением f_1 ; 2) $\sup\limits_{x\in M,\|x\|\le 1} |f_1(x)| = \sup\limits_{x\in X,\|x\|\le 1} |f(x)|$.

Задача. Доказать приведенное следствие.

Отметим, что в силу линейности функционала его непрерывность в нуле эквивалентна непрерывности в любой точке $x \in X$, что в свою очередь эквивалентно ограниченности его значений на единичном шаре.

Пространство X' линейных непрерывных функционалов, заданных на нормированном пространстве X образует полное нормированное пространство с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in X,\|x\|\le 1} |f(x)|$ и называется сопряженным к пространству X. Топология в X', отвечающая введенной норме, называется *сильной*.

В качестве примера приведем пространство $C(S)'$, сопряженное банаховому пространству $C(S)$ комплексных непрерывных функций на бикомпактном топологическом пространстве S с нормой $\|x(s)\| = \max\limits_{s\in S} |x(s)|$. Пространство $C(S)'$ можно представить следующим образом: каждому элементу $f \in C(S)'$ соответствует единственным образом определенная комплексная мера Бэра μ на S такая, что $f(x) = \int\limits_S x(s)\mu(ds)$ для всех $x \in C(S)$, и поэтому

$$\|f\| = \sup_{\sup\limits_s |x(s)|\le 1} \left| \int\limits_S x(s)\mu(ds) \right|, \qquad (*)$$

где выражение в правой части равно полной вариации меры μ на множестве S. Обратно, всякая мера Бэра μ на S такая, что правая часть формулы (*) для нее конечна, определяет при помощи формулы $f(x)=\int\limits_S x(s)\mu(ds)$ непрерывный линейный функционал $f \in C(S)'$, и его норма выражается формулой (*). Более того, если мы возьмем вещественный функционал f на вещественном B-пространстве $C(S)$, то соответствующая мера μ тоже будет вещественной. Если же, кроме того, функционал f *положителен*, т.е. $f(x)\geq 0$ для всех неотрицательных функций $x(s)$, то и соответствующая мера μ оказывается *положительной*, т.е. $\mu(B)\geq 0$ для всякого множества $B\in\wp$.

Замечание по теории топологических мер.

Напомним, что *бэровскими подмножествами* локально бикомпактного пространства S называются элементы наименьшей σ- алгебры подмножеств пространства S, содержащей все бикомпактные G_δ- множества этого пространства, т.е. все его бикомпактные множества, являющиеся пересечениями счетного числа открытых множеств этого пространства. *Борелевскими подмножествами* пространства S называются элементы наименьшей σ- алгебры подмножеств пространства S, содержащей все бикомпактные множества этого пространства.

Если S - некоторое замкнутое подмножество евклидового пространства R^n, то его бэровские и борелевские подмножества совпадают, так как в R^n всякое бикомпактное (замкнутое ограниченное) множество представляет собой G_δ-множества. Если, в частности, S - это вещественная прямая R или замкнутый интервал из R, то бэровские (борелевские) подмножества можно определить как элементы наименьшей σ- алгебры подмножеств пространства S, содержащей все полуоткрытые интервалы вида $(a,b]\in S$.

Определение. Пусть S— локально бикомпактное пространство. Неотрицательной *мерой Бэра* (*Бореля*) на S называется σ- аддитивная мера, определенная для всех бэровских (борелевских) подмножеств пространства S таким образом, что мера каждого бикомпактного множества конечна. Мера Бореля m называется *регулярной*, если для каждого борелевского множества B справедливо соотношение $m(B)=\inf\limits_{U\supseteq B}(m(U))$, где нижняя грань берется по всем открытым множествам U, содержащим B. Таким же образом можно определить регулярность меры Бэра, но при этом оказывается, что она всегда регулярна. Доказано, что всякая мера Бэра может быть единственным образом продолжена до некоторой регулярной меры Бореля. Поэтому мы рассматриваем лишь меры Бэра.

Определение. Комплексная функция $f(s)$, заданная на локально бикомпактном пространстве S, называется *бэровской функцией* на этом пространстве, если для каждого бэровского множества B комплексной плоскости C множество $f^{-1}(B)$ является бэровским множеством в S. Если S представляется в виде счетного объединения бикомпактных множеств, то всякая непрерывная функция оказывается бэровской. Всякая бэровская функция измерима по отношению к σ-алгебре всех бэровских подмножеств пространства S.

0.3.3. Операторные топологии

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства X называется ***слабо сходящейся***, если для каждого непрерывного функционала $f \in X_s'$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Если существует такой элемент $x_\infty \in X$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)$ для всех $f \in X_s'$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ ***слабо сходится к элементу*** $x_\infty \in X$. Согласно теореме Хана - Банаха элемент x_∞ определен единственным образом; мы будем писать $w-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ или “$x_n \to x_\infty$ слабо”. Пространство X называется *секвенциально слабо полным*, если всякая слабо сходящаяся последовательность его элементов слабо сходится к некоторому элементу этого пространства.

Отметим, что для нормированных пространств секвенциальная слабая полнота эквивалентна полноте, связанной со сходимостью фундаментальных сетей. Пространство $C[0,1]$ не является слабо полным.

Если $s-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, то $w-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$; обратное, вообще говоря, неверно.

Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена по норме; в частности, если $w-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, то последовательность $\|x_n\|$ ограничена и $\|x_\infty\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства X слабо сходится к элементу $x_\infty \in X$ тогда и только тогда, когда: 1) нормы $\|x_n\|$ равномерно ограничена; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)$ для каждого f из некоторого сильно плотного подмножества D' пространства X'_s.

Для любых $x \in X$ и $x' \in X'_s$ обозначим символом $\langle x, x' \rangle$ или $x'(x)$ значение функционала x' в точке x. Слабая топология в X, определяется семейством функций вида $p(x) = \sup\limits_{1\le j\le n} \left|\langle x, x'_j \rangle\right|$, где $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ - произвольная конечная система элементов пространства X'_s.

Определение 2. Последовательность $\{f_n\}$ элементов нормированного пространства X'_s называется ***слабо* сходящейся***, если для каждой точки $x \in X$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Если существует такой элемент $f_\infty \in X'_s$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ для всех $x \in X$, то говорят, что последовательность $\{f_n\}$ ***слабо* сходится к элементу*** $f_\infty \in X'_s$. Мы будем писать $w^* - \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_\infty$ или “ $f_n \to f_\infty$ слабо*”.

Если $s - \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_\infty$, то $w^* - \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_\infty$; обратное, вообще говоря, неверно.

Если X есть B- пространство, то всякая слабо* сходящаяся последовательность $\{f_n\} \subseteq X'_s$ слабо* сходится к некоторому элементу $f_\infty \in X'_s$ и $\|f_\infty\| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$.

Последовательность $\{f_n\}$ элементов полного нормированного пространства X'_s слабо* сходится к элементу $f_\infty \in X'_s$ тогда и только тогда, когда:

1) последовательность $\{\|f_n\|\}$ ограничена; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ на некотором сильно плотном подмножестве в X.

Слабая* топология в пространстве X'_s, определяется семейством функций вида $p(x') = \sup\limits_{1\le j\le n} \left|\langle x_j, x' \rangle\right|$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ - произвольная конечная система элементов пространства X.

Отметим, что сильная топология пространства X'_s определяется системой функций вида $p(x') = \sup\limits_{x\in U} \left|\langle x, x' \rangle\right|$, где U –произвольное ограниченное множество пространства X.

Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если второе сопряженное X''_s изоморфно X.

Докажем слабую* бикомпактность единичного шара в пространстве X'_s.

Теорема. Единичный шар $B_1^* = \{x' \in X_s' : \|x'\| \le 1\}$ пространства X_s', сопряженного нормированному линейному пространству X бикомпактен в слабой топологии пространства X_s'.

Доказательство. Для произвольного фиксированного элемента $x \in X$ рассмотрим на комплексной плоскости C шары $B_x = \{z \in C : |z| \le \|x\|\}$ и их топологическое произведение $B = \prod_{x \in X} B_x$. Множество B, согласно теореме Тихонова, бикомпактно. Всякий элемент $x' \in X_s'$ определяется совокупностью значений $x'(x) = \langle x, x' \rangle, x \in X$. Так как $x \in (\|x\| + \varepsilon)B_1$ при любом $\varepsilon > 0$, то из условия $x' \in X_s'$ следует, что $\langle x, x' \rangle = \langle (\|x\| + \varepsilon a, x' \rangle$, где a - некоторый элемент из B_1. Поэтому, если $x' \in B_1^*$, то $|x'(x)| \le \|x\| + \varepsilon$ т.е. $x'(x) \in B_x$. Таким образом, множество $y = \prod_{x \in X} y(x)$ B_1^* можно рассматривать как подмножество в B. Более того, нетрудно проверить, что топология, индуцированная на B_1^* слабой* топологией пространства X_s', совпадает с топологией, индуцированной на множестве B_1^* топологией тихоновского произведения $B = \prod_{x \in X} B_x$.

Итак, для нашей цели достаточно показать, что B_1^* - замкнутое подмножество в B. Допустим, что $y = \prod_{x \in X} y(x)$ - некоторый элемент замыкания множества $y = \prod_{x \in X} y(x)$ в слабой* топологии пространства B. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и любые две точки $x_1, x_2 \in X$. Совокупность всех $u = \prod_{x \in X} u(x) \in B$ таких, что $|u(x_1) - y(x_1)| < \varepsilon$, $|u(x_2) - y(x_2)| < \varepsilon$ и $|u(x_1 + x_2) - y(x_1 + x_2)| < \varepsilon$ образует окрестность элемента y в пространстве B. Эта окрестность содержит некоторую точку $x' \in B_1^*$, и, поскольку x' - непрерывный линейный функционал на X, имеют место неравенства

$$|y(x_1 + x_2) - y(x_1) - y(x_2)| \le |y(x_1 + x_2) - \langle x_1 + x_2, x' \rangle| +$$
$$+ |\langle x_1, x' \rangle - y(x_1)| + |\langle x_2, x' \rangle - y(x_2)| < 3\varepsilon .$$

Отсюда видно, что $y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2)$. Точно так же можно убедиться в том, что $y(\beta x) = \beta y(x)$, поэтому y - линейный функционал на X. Из представления $y=\prod_{x\in X} y(x)\in B$ следует, что $|y(x)|\le\|x\|$, поэтому $y(x)$ - непрерывный линейный функционал, т.е. $y\in X_s'$. С другой стороны, y представляет собой предельную точку множества B_1^* в слабой* топологии, и, следовательно, для любого $\varepsilon>0$ и произвольного $a\in B_1$ найдется такой элемент $x'\in B_1^*$, что $\left|y(a)-\langle a,x'\rangle\right|\le\varepsilon$. Значит $|y(a)|\le\left|\langle a,x'\rangle\right|+\varepsilon\le 1+\varepsilon$, откуда $|y(a)|\le 1$, т.е. $y\in B_1^*$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае сепарабельного (существует счетное всюду плотное подмножество) нормированного пространства X топологию, индуцированную на единичном шаре B_1^*, слабой* топологией пространства X_s' можно задать при помощи метрики $d(y_1',y_2')=\sum_n 2^{-n}\dfrac{\left|\langle x_n,y_1'-y_2'\rangle\right|}{1+\left|\langle x_n,y_1'-y_2'\rangle\right|}$, где $\{x_n\}$ - некоторое фиксированное счётное всюду плотное подмножество нормированного пространства X. Таким образом, B_1^* и S_1^* - бикомпактные метрические пространства в топологии, индуцированной слабой* топологией пространства X_s'.

Теперь рассмотрим линейные отображения (линейные операторы), действующие из банахового пространства X в Y.

Под *оператором A из X в Y* отображение, удовлетворяющее условию

$$A(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 Ax_1+\alpha_2 Ax_2,$$

где α_1,α_2 принадлежат полю действительных или комплексных чисел, которое сопоставляет каждому вектору x некоторого линейного подпространства $D\subset X$ некоторый вектор y пространства Y ($x_1,x_2\in D$). Подпространство D называется *областью определения* оператора A и обозначается через D (A). *Область значений* (или *образ*) R (A) оператора A определяется как, множество всех векторов из Y вида Ax, $x\in D(A)$.

Пространство X называется *пространством определения*, а Y - *пространством значений* оператора T . Если D (A) плотно в X, то оператор A называется *плотно определенным.* Если D (A) = X, то говорят, что A определен *на* X. Если $Y = X$, то A называется оператором в X. Ядро (нуль-пространство) N (A) оператора A - это множество всех векторов таких, что $Ax = 0$.

Понятие оператора, определенного на подпространстве пространства определения, приводит к понятиям *продолжения* и *сужения* операторов.

Если B и A - два оператора из X в Y такие, что $D(B) \subset D(A)$ и $Bx = Ax$ для всех $x \in D(B)$, то A называется *продолжением*, или *расширением* B, а B - *сужением* A; мы примем такие обозначения: $A \supset B$ и $B \subset A$.

Обратный оператор A^{-1} для оператора A из X в Y определяется только в том случае, когда отображение A взаимно однозначно или, другими словами, когда из равенства $Ax = 0$ следует, что $x = 0$. По определению A^{-1} есть оператор из Y в X, переводящий Ax в x. Таким образом,

$$D(A^{-1}) = R(A); \quad R(A^{-1}) = D(A);$$

$$A^{-1}(Ax) = x, \quad x \in D(A); \qquad A(A^{-1}y) = y, \quad y \in R(A).$$

Оператор A называется *обратимым*, если существует A^{-1}. Любое сужение обратимого оператора обратимо.

Оператор A из X в Y *непрерывен* в точке $x_0 \in D(A)$, если из $\|x_n - x_0\| \to 0, x_n \in D(A)$ следует, что $\|Ax_n - Ax_0\| \to 0$. Оператор A непрерывен всюду в области определения, если он непрерывен в нуле. Оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда он *ограничен*: $\|Ax\| \le M\|x\|, \; x \in D(A)$. Наименьшее число M, для которого имеет место указанное неравенство, называется *нормой* оператора A и обозначается через $\|A\|$. Иногда говорят, что неограниченный оператор имеет бесконечную норму.

Принцип продолжения по непрерывности справедлив для ограниченных операторов из X в Y. Следует только отметить, что при доказательстве существования предела $y \in Y$ последовательности $\{Ax_n\}$, где $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность в X, должна быть использована полнота пространства Y.

Оператор A^{-1} существует и ограничен тогда и только тогда, когда существует $m > 0$ такое, что $\|Ax\| \ge m\|x\|, \;\; x \in D(A)$.

Обозначим через $L(X, Y)$ множество всех ограниченных операторов, отображающих пространство X в Y. Вместо $L(X, X)$ мы пишем $L(X)$.

Так как каждый оператор, принадлежащий $L(X, Y)$, определен на всем X, а его образ содержится в Y, то линейная комбинация $\alpha A + \beta B$ операторов B и $A \in L(X, Y)$ имеет смысл. Результирующий оператор линеен и ограничен. Таким образом, $L(X, Y)$ - нормированное пространство с нормой $\|A\|$.

Пространство $L(X, Y)$ *банахово*. Для доказательства его полноты обозначим через $\{A_n\}$ последовательность Коши в $L(X, Y)$. Так как

$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| \|x\| \to 0,$$

то $\{A_n x\}$ - последовательность Коши в Y для каждого фиксированного $x \in X$. Поскольку Y полно, существует вектор $y \in Y$ такой, что $A_n x \underset{s}{\rightarrow} y$. Определим оператор A, полагая $Ax = y$. Нетрудно убедиться, что A линеен и ограничен, так что $A \in L(X,Y)$ и $\|A_n - A\| \rightarrow 0$.

В отличие от конечномерного случая в пространстве $L\ (X,\ Y)$ можно ввести различные виды сходимости. Пусть $A,\ A_n \in L(X,Y)$, n=1,2,… . Сходимость по норме в $L\ (X,\ Y)$ называется *равномерной сходимостью*. Соответствующая топология определяется семейством функций вида $p(A) = \sup\limits_{x \in U} \|Ax\|$, где U - произвольное ограниченное множество из X. Отметим, что сходимость последовательности $\{A_n\}$ по норме эквивалентна равномерной сходимости последовательности $\{A_n x\}$ в шаре $\|x\| \leq 1$.

Говорят, что последовательность $\{A_n\}$ в $L\ (X,\ Y)$ *сильно* сходится к оператору $A \in L(X,Y)$, если $A_n x \rightarrow Ax$ для каждого $x \in X$. Соответствующая топология определяется семейством функций вида $p(A) = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} \|Ax_j\|$, где $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ произвольно выбранная конечная система элементов пространства X. Последовательность $\{A_n\}$ сходится *слабо*, если $\{A_n x\}$ сходится слабо для каждого $x \in X$, другими словами, если последовательность $\langle A_n x, y' \rangle$ сходится для каждого $x \in X$ и $y' \in Y_s'$. Если для каждого $x \in X$ вектор Ax является слабым пределом последовательности $\{A_n x\}$, то A называется *слабым пределом* последовательности $\{A_n\}$. (Слабый предел единствен.) Соответствующая топология определяется семейством функций вида $p(A) = \sup\limits_{\|x\| \leq 1, 1 \leq j \leq n} \left| \langle Ax, y_j' \rangle \right|$, где $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ произвольно выбранная конечная система элементов пространства Y_s'. Если пространство Y слабо полно, то слабо сходящаяся последовательность в $L(X,\ Y)$ имеет слабый предел. Из сходимости по норме вытекает сильная сходимость, которая влечет за собой слабую сходимость. Мы используем следующие обозначения: $A = u - \lim\limits_{n \to \infty} A_n$, $(A_n \underset{u}{\rightarrow} A)$ для сходимости по норме, $A = s - \lim\limits_{n \to \infty} A_n$, $(A_n \underset{s}{\rightarrow} A)$ для сильной сходимости и $A = w - \lim\limits_{n \to \infty} A_n$, $(A_n \underset{w}{\rightarrow} A)$ для слабой сходимости.

Используя различные виды сходимости в $L\ (X,\ Y)$, можно ввести различные понятия непрерывности операторнозначных функций $t \rightarrow A(t) \in L(X,Y)$ вещественной или комплексной переменной t. Так, функция $A\ (t)$ непрерывна *по* *норме*, если $\|A(t+h)-A(t)\| \to 0$ при $h \to 0$. Функция A (t) *сильно непрерывна*, если вектор-функция $A(t)$ x сильно непрерывна для каждого $x \in X$; A (t) *слабо непрерывна*, если A (t) x слабо непрерывна для каждого $x \in X$, т.е. функция $\langle A(t)x, y' \rangle$ непрерывна для всех $x \in X$ и $y' \in Y_s'$.

Функция $\| A\ (t) \|$ непрерывна, если A (t) непрерывна по норме. Это, вообще говоря, неверно для сильно непрерывных функций A (t). *Если же* $A(t)$ *слабо непрерывна, то* $\|A(t)\|$ *локально ограничена и полунепрерывна снизу.* Аналогично можно ввести различные понятия дифференцируемости. Функция A (t) *дифференцируема по норме*, если отношение $h^{-1}[A(t+h)-A(t)]$ имеет предел по норме при $h \to 0$, который называется производной по норме функции A (t).

Сильная производная dA $(t)/dt$ определяется равенством

$\frac{d}{dt}A(t) = s - \lim_{h\to 0} h^{-1}[A(t+h)-A(t)]$; аналогично можно определить слабую производную.

Задача. Если $x(t) \in X$ и $A(t) \in L(X,Y)$ - сильно дифференцируемые функции, то $A(t)x(t) \in Y$ сильно дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}(A(t)x(t)) = \left(\frac{d}{dt}A(t)\right)x(t) + A(t)\frac{d}{dt}x(t).$$

Можно также определить различные понятия интеграла операторнозначной функции A (t) вещественной переменной t. Если A (t) непрерывна по норме, то интеграл $\int A(t)dt$ можно определить так же, как в конечномерном случае. Если $A(t)$ лишь сильно непрерывна, то для каждого $x \in X$ можно определить интеграл $y = \int A(t)xdt$. Ясно, что $\|y\| \le \int \|A(t)x\| dt \le \|x\| \int \|A(t)\| dt$; отметим, что функция $\|A(t)\|$ не обязана быть непрерывной, однако она ограничена и полунепрерывна снизу и потому интегрируема. Таким образом, отображение $x \to y = Bx$ определяет оператор $B \in L(X,Y)$ норма которого не превосходит $\int \|A(t)\| dt$. Полагая $\int A(t)dt = B$, мы определим интеграл в сильном смысле $\int A(t)dt$ сильно непрерывной функции A (t), обладающий следующими свойствами:

$$(\int A(t)dt)x = \int A(t)xdt, \quad \left\|\int A(t)dt)x\right\| \le \int \|A(t)\|dt, \quad \frac{d}{dt}\int_a^t A(s)ds = A(t)$$

слева в последнем равенстве фигурирует сильная производная. Аналогично можно определить интеграл функции *A* (*z*) комплексной переменной *z* вдоль кривой на комплексной плоскости.

Так же, как и для вектор-функций, понятия равномерной, сильной и слабой голоморфности для операторнозначных функций совпадают. Точнее, имеет место

Теорема . *Пусть функция A* (*z*) *со значениями в L* (*X*, *Y*) *определена в области* Δ *комплексной плоскости и для каждого* $x \in X$ *и* $y' \in Y_s'$ *функция* $\langle A(z)x, y' \rangle$ *голоморфна в* Δ. *Тогда A* (*z*) *голоморфна по норме в* Δ (*дифференцируема по норме в* Δ).

0.3.4. Теорема об обратной функции

Теорема. Пусть *X* - банахово пространство, $A: X \to X$ - обратимый линейный оператор, $\varphi: X \to X$ - отображение, удовлетворяющее условию Липшица, причем $Lip(\varphi) < \left\| A^{-1} \right\|^{-1}$.

Тогда отображение $A + \varphi$ обратимо и обратное отображение удовлетворяет условию Липшица, причем $Lip((A+\varphi)^{-1}) \le \dfrac{1}{\left\| A^{-1} \right\|^{-1} - Lip(\varphi)}$.

Доказательство. (1) Покажем сначала, что отображение $A + \varphi$ инъективно, и одновременно получим неравенство, которое даст требуемую оценку для $Lip((A+\varphi)^{-1})$, когда соответствующее отображение будет построено.

Действительно, $\left\| (A+\varphi)(x) - (A+\varphi)(y) \right\| = \left\| (A(x-y) + \varphi(x) - \varphi(y \right\| \ge$

$$\ge (\left\| A^{-1} \right\|^{-1} - Lip(\varphi)) \left\| x - y \right\|).$$

(2) Остается показать, что отображение $A + \varphi$ сюръективно. Другими словами, мы хотим доказать разрешимость при заданном $y \in X$ $y \in X$ уравнения

$$(A+\varphi)(z) = y \qquad (*)$$

относительно $z \in X$. При $\varphi = 0$ это уравнение принимает вид

$$Ax = y \qquad (**)$$

и, очевидно, имеет решение $x_0 = A^{-1}y$. Уравнение (*) можно переписать в виде

$$(A+\varphi)(x_0 + h) = y .$$

Раскрывая скобки и используя (**), получаем

$$Ax_0 + Ah + \varphi(x_0 + h) = Ax_0 \text{ или } Ah + \varphi(x_0 + h) = 0 .$$

Далее имеем (поскольку A обратимо) $h+A^{-1}\varphi(x_0+h)=0$,

или $h=-A^{-1}(\varphi(x_0+h))$.

Рассмотрим теперь отображение $\phi(h)=-A^{-1}(\varphi(x_0+h))$.

Оно удовлетворяет условию Липшица, причем $Lip(\phi)\le\|A^{-1}\|Lip(\varphi)$.

Из наших предположений следует, что $Lip(\phi)<1$, а потому в силу принципа сжатых отображений ϕ имеет неподвижную точку h, которая является решением уравнения $h=-A^{-1}(\varphi(x_0+h))$. Следовательно, $z= x_0+ h$ - решение уравнения (*). Теорема доказана.

0.3.5. Теорема Асколи –Арцела

Следующая теорема позволяет привести пример относительно бикомпактного бесконечного подмножества бесконечномерного B-пространства.

Теорема (Асколи—Арцела). Пусть S—произвольное бикомпактное метрическое пространство, и пусть $C(S)$ обозначает B-пространство всех вещественных (или комплексных) непрерывных функций $x(s)$ на S с нормой $\{s_n\}\subset S$ $\|x\|=\sup\limits_{s\in S}|x(s)|$. Тогда последовательность $\{x_n(s)\}\subseteq C(S)$ относительно бикомпактна в $C(S)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) функции $x_n(s)$ *равномерно ограничены* (по n), т.е.

$$\sup_{n\ge1}\sup_{s\in S}|x_n(s)|<\infty;$$

2) функции $x_n(s)$ *равностепенно непрерывны* (по n), т.е.

$$\lim_{\delta\to0}\sup_{n\ge1,d(s',s'')\le\delta}|x_n(s')-x_n(s'')|=0$$

Доказательство. По теореме Больцано — Вейерштрасса всякая ограниченная последовательность комплексных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, при любом фиксированном s из последовательности $\{x_n(s)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. С другой стороны, поскольку метрическое пространство S бикомпактно, существует счетное плотное подмножество $\{s_n\}\subset S$ такое, что для любого $\varepsilon>0$ найдется конечное подмножество $\{s_{n_j}:1\le n_j\le k(\varepsilon)\}$ множества $\{s_n\}$, удовлетворяющее условию $\sup\limits_{s\in S}\inf\limits_{1\le n_j\le k(\varepsilon)}d(s,s_{n_j})\le\varepsilon$.

При помощи диагонального процесса можно выбрать из $\{x_n(s)\}$ подпоследовательность $\{x_{n'}(s)\}$, сходящуюся одновременно во всех точках s_1, s_2,… s_k ,… .

Так как функции $x_n(s)$ равностепенно непрерывны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $d(s', s'') \le \delta$ для всех значений n=1, 2,... справедливо неравенство $\left| x_n(s') - x_n(s'') \right| \le \varepsilon$. Поэтому для любой точки $s \in S$ найдется номер j, $j \le k(\delta)$ такой, что

$$\left| x_{n'}(s) - x_{m'}(s) \right| \le \left| x_{n'}(s) - x_{n'}(s_{n_j}) \right| + \left| x_{n'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j}) \right| + \left| x_{m'}(s) - x_{m'}(s_{n_j}) \right| \le$$

$$\le 2\varepsilon + \left| x_{n'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j}) \right|.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n', m' \to \infty} \max\limits_{s} \left| x_{n'}(s) - x_{m'}(s) \right| \le 2\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n', m' \to \infty} \left\| x_{n'} - x_{m'} \right\| = 0$; отсюда нетрудно вывести утверждение теоремы.

Г Л А В А 1

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

§ 1. *Теоремы существования*

1.1.1. Теорема Пикара – Линделёфа

Пусть X- банахово пространство. В пространстве X рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad (*)$$

и его решение, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0 \in X$, $t_0 \in I$, где I- открытое множество в поле вещественных или комплексных чисел.

Под решением уравнения (*) в этом пункте будем понимать такую непрерывную функцию $x: I \to X$, сильная производная которой в каждой внутренней точке t множества I равна $f(t,x(t))$.

Теорема 1. Пусть отображение $f(t,x): I \times B(x_0, r) \to X$ непрерывно на множестве $H = \{(t,x): t_0 - a < t < t_0 + a, x \in B(x_0, r)\}$ и удовлетворяет условию Липшица по переменной x. Пусть M является верхней границей нормы отображения $f(t, x)$ на H, ($M = \sup\limits_{(t,x)\in H} \|f(t,x)\|$) и $\alpha = \min(a, r/M)$. Тогда задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0)=x_0,$$

имеет на отрезке $J = \{t : |t - t_0| \le \alpha\}$ единственное решение $x(t,t_0,x_0)$.

Доказательство методом последовательных приближений. Пусть $x_0(t) \equiv x_0$. Предположим, что $x_k(t)$ определена на $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, непрерывна и удовлетворяет неравенству $\|x_k(t)\| \le r$, k =0,1,2,…,n. Положим

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds.$$

Ясно, что $\|x_{n+1} - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds \right\| \le M \left| \int_{t_0}^{t} ds \right| \le M|t - t_0| \le M\alpha \le r$.

Таким образом, все функции $x_0(t)$, $x_1(t)$, ... определены и непрерывны на $|t - t_0| \le \alpha$ и $\|x_n(t) - x_0\| \le r$ при $|t - t_0| \le \alpha$.

Докажем по индукции, что $\left\| x_{n+1}(t) - x_n(t) \right\| \le \dfrac{MK^n(|t-t_0|)^{n+1}}{n!}$, n = 0, 1,..., где K=Lip(f). Ясно, что при n=0 неравенство верно. Предположим, что неравенства верны при n= 0,1,…k-1, и рассмотрим n=k Из равенства

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds$$

при $k \ge 1$ получаем соотношение

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s)) \right] ds,$$

которое по определению K дает неравенство

$$\left\| x_{k+1}(t) - x_k(t) \right\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \| f(s), x_k(s) - f(s), x_{k-1}(s) \| ds \right| \le$$

$$\le K \left| \int_{t_0}^{t} \| x_k(s) - x_{k-1}(s) \| ds \right| \le K \left| \int_{t_0}^{t} \frac{MK^{k-1}(|s-t_0|)^k}{(k-1)!} ds \right| \le \frac{MK^k(|t-t_0|)^{k+1}}{k!}.$$

Из полученных неравенств следует, что ряд

$$x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1}(t) - x_n(t)) = x(t)$$

равномерно сходится при $|t - t_0| \le \alpha$. Следовательно, $x(t) = u - \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$. Так как $f(t,x)$ липшицева в H, то при $n\to\infty$ функции $f(t,x_n(t))$ равномерно стремятся на отрезке $|t - t_0| \le \alpha$ к $f(t,x(t))$. Поэтому в равенстве

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds$$

можно перейти к пределу под знаком интеграла, и мы получим

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Следовательно, функция $x(t)$ является решением задачи Коши. Докажем его единственность. Пусть $y(t)$ - какое-либо решение рассматриваемой задачи на $|t - t_0| \le \alpha$. Тогда $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$.

Очевидной индукцией получаем неравенство $\|x_n(t)-y(t)\|\le\dfrac{MK^n\alpha^{n+1}}{n!}$ при $|t-t_0|\le\alpha$, n=0,1,... . Так как $\dfrac{MK^n\alpha^{n+1}}{n!}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\|x(t)-y(t)\|\le 0$, т.е. $x(t)\equiv y(t)$. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Неравенство $\|x_n(t)-x(t)\|\le\dfrac{MK^n\alpha^{n+1}}{n!}$ дает оценку ошибки приближения.

Замечание 2. Если в условиях доказанной теоремы добавить еще аналитичность $f(t,x)$ в H (т.е. для каждой точки $(t_0,x_0)\in H$ существует окрестность в которой $f(t,x)$ разлагается в степенной ряд по степеням t-t_0, x-x_0), то решение задачи Коши $x(t,t_0,x_0)$ аналитично при $|t-t_0|\le\alpha$. Аналогичные теоремы справедливы когда t, x, $f(t,x)$-комплекснозначны.

Замечание 3. Предположения о локальной липшицевости существенно. Даже для очень «хорошего» уравнения $\dot{x}=x^{1/3}$, $x(0)=0$, $x\in R$ решение не обладает свойством единственности. Оценка интервала существования решения также существенна. Так для уравнения $\dot{x}=x^2$, $x(0)=x_0$ при любом $x_0\ne 0$ решение за конечное время уходит в бесконечность.

Рассмотрим условие, гарантирующее существование решения на бесконечном интервале I.

Теорема 2. Пусть отображение $f(t,x):I\times X\to X$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t,x):I\times X\to X$ непрерывна по t при каждом $x\in X$ в сильной топологии пространства X и ограничена на каждом множестве вида $J\times U$, где J - ограниченное множество в I, U - ограниченное множество в X.

2) $f(t,x):I\times X\to X$ удовлетворяет условию Липшица $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\le K\|x_1-x_2\|$, где число K не зависит от t, x_1 и x_2.

Тогда задача Коши $\dot{x}(t)=f(t,x(t))$, $x(t_0)=x_0\in X$ имеет единственное решение $x(t,t_0,x_0)$, $t\in I$.

Доказательство. Предположим вначале, что интервал I ограничен, и введем в рассмотрение банахово пространство E ограниченных непрерывных функций $x:J\to X$ с нормой $\|x\|_K=\sup\{e^{-\lambda K|t-t_0|}\|x(t)\|:t\in J\}$, где $\lambda>1$ фиксированное число.

Заметим, что ограниченными решениями задачи Коши являются те и только те элементы $x \in E$, которые удовлетворяют условию $F(x)=x$ для отображения F, определяемого равенством

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

где $(t \in J)$, $x_1, x_2 \in E$. Очевидно, F есть отображение пространства E в себя. Если мы покажем, что F - сжатие, то на основании метода сжимающих отображений существование и единственность ограниченного решения задачи Коши гарантировано. Пусть $x_1, x_2 \in E$. Тогда

$$[F(x_1) - F(x_2)] = \int_{t_0}^{t} [f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))]ds$$

и, следовательно, $\|[F(x_1) - F(x_2)]\| \leq K \left| \int_{t_0}^{t} \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \right|.$

Правая часть неравенства мажорируется выражением

$$K \cdot \|x_1 - x_2\|_K \cdot \left| \int_{t_0}^{t} e^{\lambda K |s - t_0|} ds \right|.$$

Входящий в это выражение интеграл не превосходит

$$(\lambda K)^{-1}[e^{\lambda K|t - t_0|} - 1] < (\lambda K)^{-1} e^{\lambda K|t - t_0|}.$$

Таким образом, получаем $\|F(x_1) - F(x_2)\|_K < \lambda^{-1} \cdot \|x_1 - x_2\|_K$,

и так как $\lambda > 1$, то отображение F сжимающее.

Остается рассмотреть случай неограниченного интервала I. Введем в рассмотрение такую возрастающую последовательность (J_k) компактных интервалов, содержащих t_0 в качестве внутренней точки (относительно подпространства I, что $I = \bigcup_k J_k$). Рассмотрим ограниченные решения для интервалов J_k. Из доказанной единственности следует, что эти различные решения «складываются в одно целое», давая локально ограниченное решение на всем интервале I. Обратно, если x - локально ограниченное решение на I, то из доказанной выше единственности вытекает, что сужение x на J_k - единственное ограниченное решение на J_k. Так как это справедливо для любого k, то тем самым это эквивалентно единственности существующего решения на всем интервале I

Замечание 4. Предположение о непрерывности $f(t, x)$ можно ослабить потребовав лишь измеримость при каждом $x \in X$ отображения $f(t,x)$, однако равенство $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ в этом случае следует понимать почти всюду.

Замечание 5. При выполнении условий теоремы 2 решения задачи Коши при $t \to \infty$ "растут не быстрее экспоненты." В частности, решение задачи Коши для линейной системы вида $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ с ограниченным оператором $\|A(t)\| \le K$ существует при любом $t \in I, x_0 \in X$.

Метод сжимающих отображений применяется также к доказательству существования решений интегральных уравнений, например, уравнения вида

$x(t) + \int\limits_{t_0}^{t} f(t, s, x(s))ds = b(t)$. Однако его применение практически ограничивается случаями, когда $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x. Для случаев, когда условия Липшица не выполняются, необходимы иные теоремы о неподвижной точке.

1.1.2. Теорема Пеано

Пусть X- рефлексивное банахово пространство. В пространстве X рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \qquad (**)$$

и его решение, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0 \in X$, $t_0 \in I$, где I открытое множество в поле вещественных чисел.

Под решением уравнения (**) в этом пункте будем понимать такую слабо непрерывную функцию $x: I \to X$, слабая производная которой в каждой внутренней точке t множества I равна $f(t,x(t))$, т.е. для любого $x' \in X_s'$ выполнено равенство $\langle \dot{x}(t), x' \rangle = \langle f(t, x(t)), x' \rangle$.

В приводимой ниже теореме отсутствует условие Липшица для $f(t,x)$ и утверждение о единственности решения.

Теорема. Пусть $x \in X$,и функция $f(t,x): J \times X \to X$ сильно непрерывна в H: $t_0 \le t \le t_0 + a$, $\|x - x_0\| \le r$; и $\|f(t,x)\| \le M$ в H; $\alpha = \min(a, r/M)$. Тогда задача Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0)=x_0$, имеет на отрезке $[t_0, t_0 + \alpha]$ по крайней мере одно слабое решение $x(t,t_0,x_0)$.

Доказательство. Возьмем некоторое $\beta > 0$ и обозначим через $x_0(t)$ некоторую, например линейную функцию класса C^1, заданную на $[t_0 - \beta, t_0]$ и удовлетворяющую условиям $x_0(t_0)=x_0$, $\dot{x}(t_0) = f(t_0, x_0)$ и $\|x(t) - x_0\| \le r$,

$\|\dot{x}(t)\| \le M$. Определим на отрезке $[t_0, t_0+\alpha]$ функцию $x_\gamma(t)$, $0<\gamma\le\beta$, положив $x_\gamma(t)=x_0(t)$ на $[t_0-\beta, t_0]$ и

$$x_\gamma(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, x_\gamma(s-\gamma))ds \quad \text{на} \quad [t_0, t_0+\alpha]. \qquad (***)$$

Этой формулой продолжение $x_\gamma(t)$ функции $x_0(t)$ определяется на отрезке $[t_0, t_0+\alpha_1]$, $\alpha_1=\min(\alpha,\gamma)$, так что $x_\gamma(t)\in C^1$ на отрезке $[t_0-\beta, t_0+\alpha_1]$ и там же $\|x_\gamma(t)-x_0\|\le r$.

Формула (***) может быть теперь использована для продолжения функции $x_\gamma(t)$ на отрезок $[t_0-\beta, t_0+\alpha_2]$, $\alpha_2=\min(\alpha, 2\gamma)$, как функции класса C^1, удовлетворяющей неравенству $\|x_\gamma(t)-x_0\|\le r$. Продолжая эти рассуждения мы получаем, что формула (***) определяет $x_\gamma(t)$ на $[t_0, t_0+\alpha]$ таким образом, что $x_\gamma(t)$ удовлетворяет неравенству $\|x_\gamma(t)-x_0\|\le r$ и принадлежит классу C^1 на всем отрезке $[t_0-\beta, t_0+\alpha]$.

Так как $\|\dot{x}_\gamma\|\le M$, то семейство функций $x_\gamma(t)$, $0<\gamma\le\beta$, является равностепенно непрерывным в сильной топологии пространства X. Зададим произвольно $x'\in X_s'$. Семейство функций $x_\gamma(t)$ удовлетворяет равенству $\langle \dot{x}_\gamma(t), x'\rangle = \langle f(t, x_\gamma(t)), x'\rangle$. Учитывая слабую компактность шара в пространстве X, равномерную непрерывность $f(t,x)$ из сети $\{x_\gamma(t)\}$ выбираем сходящуюся подсеть $\{x_\delta(t)\}$. Слабый предел $x(t)=w-\lim\limits_{\delta\downarrow 0} x_\delta(t)$ удовлетворяет равенству $\langle \dot{x}(t), x'\rangle = \langle f(t, x(t)), x'\rangle$.Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что конечномерное пространство всегда рефлексивно. Предположение о рефлексивности пространства существенно.
Действительно, пусть c_0 пространство Банаха. Элементами этого пространства являются последовательности $x=\{x_n\}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ и норма определяется равенством $\|x\|=\sup\limits_n |x_n|$. Известно, что $c_0'=l^1$, а $(l^1)'=m$ - пространство ограниченных последовательностей. Рассматривая отображение $f: c_0\to c_0$ такое, что $f(x_n)=y_n$, где $y_n=|x_n|^{1/2}+1/(n+1)$, убеждаемся в том, что $f(x)$ непре-

рывно, однако не существует решения задачи Коши $\dot{x} = f(x), \ \ x(0) = 0$, что устанавливается непосредственным интегрированием.

п.1.1.2. Теорема Кнезера

В этом пункте рассмотрим теорему, относящуюся к случаю неединственности решения задачи Коши в конечномерном пространстве над полем вещественных чисел. Также будем считать, что норма в R^n гильбертова.

Теорема . Пусть $f\ (t,\ x)$ непрерывна в области в H: $t_0 \le t \le t_0 + a$, $\|x - x_0\| \le r$; и $\|f(t,x)\| \le M$ в H, $x \in R^n; \alpha = \min(a, r/M)$. Обозначим через S_c множество тех точек x_c, для которых на отрезке $[t_0,\ c]$, $0 < c - t_0 \le \alpha$, существует решение $x(t,t_0,x_0)$ задачи Коши

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0,\, t_0\,,\, x_0)=x_0$$

такое, что $x(c,t_0,x_0)=x_c$, т.е. включение $x_c \in S_c$ означает, что x_c является точкой, достигаемой при $t = c$ некоторым решением задачи Коши. Тогда множество S_c является замкнутым связным множеством.

Доказательство. Обозначим через Σ множество решений рассматриваемой задачи Коши. Отрезок $[t_0\ c]$ принадлежит области существования каждого из них и $S_c = \{x(c,t_0,x) : x(t,t_0,x) \in \Sigma\}$. Покажем, что S_c замкнуто. Пусть $x_{n,c} \to x_c$ при $n \to \infty$, и $x_{n,c} \in S_c$. Тогда $x_{nc} = x_n\ (c)$ для некоторого $x(t,t_0,x_0) \in \Sigma$. По теореме Асколи –Арцела из последовательности решений $x_n(t,t_0,x_0)$ можно выбрать равномерно сходящуюся к некоторому решению $x(t,t_0,x_0) \in \Sigma$ подпоследовательность. Ясно, что $x(c,t_0,x_0) = x_c$.

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда S_c является несвязным множеством и потому состоит из двух непустых замкнутых множеств S^0 и S^1, не имеющих общих точек. Так как S_c ограничено, то расстояние $d(S^0,S^1) = \delta > 0$, где $d(S^0,S^1) = \inf\left\|x^0 - x^1\right\|$ для $x^0 \in S^0, x^1 \in S^1$. Для любого x положим $e\ (x)= d(x,\ S^0)\ \text{-}\ d\ (x,S^1)$, так что $e(x) \ge \delta > 0$, если $x \in S^1$, и $e(x) \le -\delta < 0$, если $x \in S^0$. Функция $e(x)$ непрерывна и $e(x) \ne 0$ для $x \in S_c$.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и $x(t,t_0,x_0) \in \Sigma$. Тогда существует непрерывная функция $g(t,x)$, зависящая от ε и (фиксированного) $x\ (t)$, определенная для всех x и $t_0 \le t \le t_0 + c$ и обладающая следующими свойствами:

1) $\|g(t,x)\| \le M + \varepsilon$ в H;

2) $\|g(t,x)-f(t,x)\|\le\varepsilon$ в H;

3) $g(t,x)$, удовлетворяет условию Липшица по x;

4) $x(t,t_0,x_0)$ является решением задачи Коши $\dot{x}=g(t,x)$, $x(t_0)=x_0$.

Убедимся, что такая функция $g(t,x)$ существует.

Замечание*. Для построения функции удовлетворяющей 1)-3) воспользуемся стандартным способом аппроксимации функции в R^n. Положим $f(t,x)=0$ вне некоторой окрестности H и рассмотрим семейство функций

$I_\alpha(f(t,x))=g_\alpha(t,x)=c\alpha^{-n/2}\int\limits_{R^n}f(t,y)\exp(-\alpha^{-1}\|x-y\|^2)dy$, где $\alpha>0$, а постоянная c выбрана так, что $c\int\limits_{R^n}\exp(-\|x\|^2)dx=1$. Нетрудно убедиться в том, что $g_\alpha(t,x)\in C^\infty(R^n)$ по переменной x и на бикомпакте H $\|f(t,x)-g_\alpha(t,x\|\to 0$ при $\alpha\downarrow 0$. Это единственное место в доказательстве теоремы Кнезера, где используется конечномерность пространства. Отметим, также, что в случае дифференцируемости по переменной x до порядка k $\|g_\alpha(t,x)-f(t,x)\|_{C^k(H)}\to 0$ при $\alpha\downarrow 0$. Этим важным замечанием мы будем пользоваться в дальнейшем.

Задача. Доказать приведенное замечание.

Итак, пусть $g^*(t,x)$ бесконечно дифференцируемая и , соответственно, липшицева функция, удовлетворяющая условиям 1) - 3) с заменой ε на $\varepsilon/2$.

Пусть $g(t,x)=g^*(t,x)+f(t,x(t,t_0x_0))-g^*(t,x(t,t_0x_0))$. Тогда из неравенства $\|g(t,x)-g^*(t,x)\|\le\|f(t,x(t,t_0x_0))-g^*(t,x(t,t_0x_0))\|\le\varepsilon/2$ следует, что $g(t,x)$ удовлетворяет условиям 1)-4).

Свойство 4) следует из того, что $g(t,x(t,t_0x_0))=f(t,x(t,t_0x_0))=\dot{x}(t,t_0x_0)$.

Пусть $x_i(t)=x_i(t,t_0,x_0)\in\Sigma$, i=0,1, и $x_0(c)\in S^0$, $x_1(c)\in S^1$. Пусть для данного $\varepsilon>0$ функции $g_0\,(t,x)$ и $g_1\,(t,x)$ обладают свойствами 1) - 4), где $x_0(t)=x_0(t,t_0,x_0)\in\Sigma$, $x_1(t)=x_1(t,t_0,x_0)\in\Sigma$ соответственно. Рассмотрим однопараметрическое семейство задач Коши

$$\dot{x}=g_\beta(t,x)=(1-\beta)g_0(t,x)+\beta g_1(t,x),\quad x(t_0)=x_0,$$

где $0\le\beta\le 1$.

Так как $g_\beta(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x, то задача Коши имеет на отрезке $t_0\le t\le t_0+c$ единственное решение $x(t,t_0,x_0,\beta)$. Непрерывная зависимость решения от $0\le\beta\le 1$ следует из единственности решения, теоремы Асколи - Арцела и из того, что при $\beta_n \to \beta_\infty$ решения задачи Коши для системы $\dot{x} = g_{\beta_n}(t,x)$ равномерно сходятся к единственному решению задачи Коши для системы $\dot{x} = g_{\beta_\infty}(t,x)$. Поэтому, в частности, $x(c,t_0,x_0,\beta)$, а значит и $e(x(c,t_0,x_0,\beta))$ является непрерывной функцией от β. Поскольку $x(c,t_0,x_0,0) \in S^0$, $x(c,t_0,x_0,1) \in S^1$; $e(x) \geq \delta > 0$ при $x \in S^1$; $e(x) \leq -\delta < 0$, если $x \in S^0$, и функция e (x) непрерывна, то существует такое значение γ $(0 < \gamma < 1)$,что $e(x(c,t_0,x_0,\gamma)) = 0$. Выбор γ зависит только от ε. Задав последовательность $\varepsilon_n = 1/n$, n>1, и, выбирая из последовательности γ_n сходящуюся подпоследовательность убеждаемся в том, что решения задачи Коши для системы уравнений $\dot{x} = g_{\gamma_n}(t,x)$ сходятся к некоторому решению задачи Коши для ситемы уравнений $\dot{x} = f(t,x)$, для которого $e(x(c,t_0,x_0)) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Задача. Покажите на примерах, что множество S_c не обязано быть выпуклым, если $n > 1$, где n - размерность вектора x; например, если $n = 2$, множество S_c может быть границей круга.

1.1.3. Пример неединственности

Чтобы проиллюстрировать, как «плохо» может обстоять дело с единственностью, покажем, что существует (скалярная) функция $U(t,u)$, непрерывная на (t,u)- плоскости и такая, что для каждой начальной точки (t_0,u_0) задача Коши

$$\dot{u} = U(t,u), \qquad u(t_0) = u_0 \qquad (1)$$

имеет более одного решения на каждом отрезке $[t_0, t_0+\varepsilon]$ и $[t_0-\varepsilon, t_0]$ при любом $\varepsilon > 0$.

Обозначим через S_0 совокупность линий

$$u = 4i + \cos\pi t \text{ и } u = 4i + 2 - \cos\pi t,\ -\infty < t < +\infty,\ i = 0, \pm1, \ldots, \quad (2)$$

составленных из дуг, определённых на отрезках единичной длинны, $k \leq y \leq k+1$, $k = 0, \pm1, \ldots$

Для каждого $n = 0,1,2,\ldots$ будет построено множество S_n дважды непрерывно дифференцируемых дуг

$$u = u_{jk}(t), \quad \frac{k}{2^n} \leq t \leq \frac{k+1}{2^n},\ j,k = 0, \pm1, \ldots \quad (3)$$

Символ S_n будет обозначать или множество дуг (3), или множество точек на этих дугах. Множество S_n дуг (3) будет обладать следующими свойствами:

1) $$u_{jk}(t) < u_{j+1,k}(t)\text{, для } \frac{k}{2^n} \le t \le \frac{k+1}{2^n}; \qquad (4)$$

2) дуги $u = u_{jk}(t)$ и $u = u_{j+1,k}(t)$ имеют ровно одну общую концевую точку;

3) для каждой пары j,k имеется по крайней мере один индекс h, такой, что $u_{h,k-1} = u_{h+1,k-1} = u_{jk}$ в точке $t = \frac{k}{2^n}$ и индекс i такой, что $u_{i,k+1} = u_{i+1,k+1} = u_{jk}$ в точке $t = \frac{k+1}{2^n}$;

4) любые две дуги из S_n, обладающие общей точкой, имеют в этой точке и общую касательную; отсюда

5) любая непрерывная дуга $u = u(t)$, определённая на $a \le t \le b$ и составленная из некоторых дуг множества S_n добавлением других дуг из S_n, может быть продолжена (и не единственным образом) на $-\infty < t < +\infty$, оставаясь при этом в классе C^1 (и кусочно гладка в классе C^2);

6) если $U_n(t,u)$ определена в точках множества S_n как угловой коэффициент касательной в точке $(t,u) \in S_n$, то $U_n(t,u)$ равномерно непрерывна на S_n, и дуги из 5) составляют множество решений уравнения

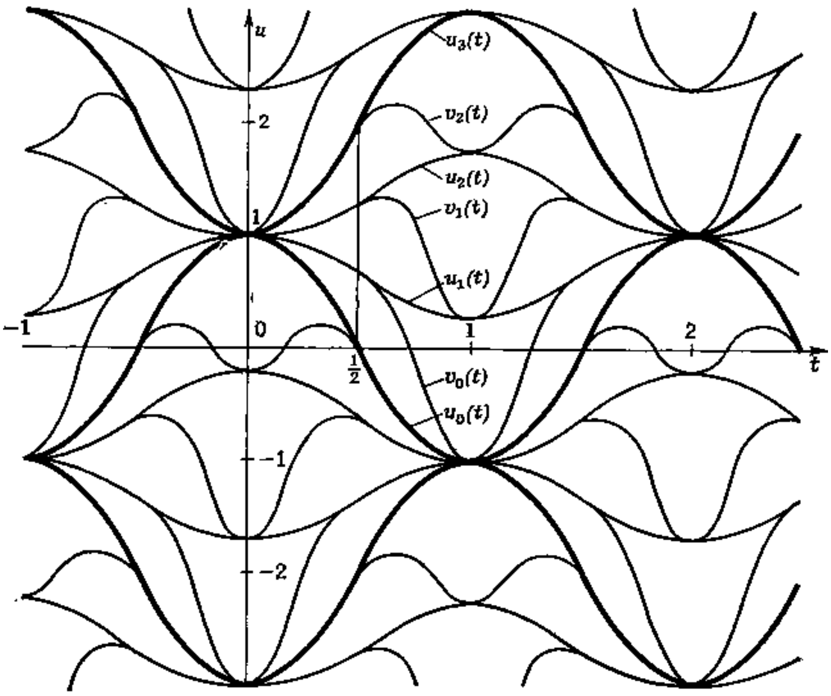
$$\dot{u} = U_n(t,u); \qquad (5)$$

7) множества $S_0, S_1, \ldots$ удовлетворяют условию $S_n \subset S_{n+1}$, так что $U_{n+1}(t,u)$ является продолжением функции $U_n(t,u)$;

8) множество $S = \cup S_n$ концевых точек $(k/2^n, u_{jk}(k/2^n))$, где $j,k = 0, \pm 1, \ldots$ и $n = 0, 1, \ldots$, всюду плотно;

9) функция $$U(t,u) = \lim_{n\to\infty} U_n(t,u), \qquad (6)$$

определённая на $S = \cup S_n$, имеет (единственное) непрерывное продолжение на всю плоскость. Условие 9) является единственным нетривиальным условием (построение S отражено на рисунке).



На рисунке жирные кривые соответствуют дугам S_0. Жирные и светлые кривые дугам S_1,если m=3. Из рисунка ясно, как S_0 или S_1 делят плоскость.

Пусть $\pi^2 > \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \ldots$, $M_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$ и $M = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. (7)

Предположим, что множество S_n уже построено и таково, что:

а) функции (3) удовлетворяют неравенствам

$$\left|\dot{u}_{jk}(t)\right|,\ \left|\ddot{u}_{jk}(t)\right| \le M_n, \tag{8}$$

б) если $d_n = \sup_{j,k,t} \max\left(\left|u_{j+1,k}(t) - u_{jk}(t)\right|, \left|\dot{u}_{j+1,k}(t) - \dot{u}_{jk}(t)\right|\right)$, (9)

то

$$d_n \le \varepsilon_n, \tag{10}$$

в) если n>0 и ни одна дуга из S_{n-1} не лежит между $u = u_{ik}(t)$ и $u = u_{hk}(t)$, то

$$\left(\left|\dot{u}_{ik}(t) - \dot{u}_{hk}(t)\right|\right) \le d_{n-1} + \varepsilon_n. \tag{11}$$

Множество дуг S_{n+1} будет получено из S_n добавлением на каждом отрезке $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]$ и $\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ конечного числа дуг, расположенными между дугами $u = u_{jk}(t)$ и $u = u_{j+1,k}(t)$ из S_n. Дуги из S_n и эти добавленные дуги составят множество S_{n+1}.

Для удобства положим $u = u_{jk}(t)$ и $v = u_{j+1,k}(t)$, $a = \frac{k}{2^n}$, $b = \frac{k+1}{2^n}$, $c = \frac{a+b}{2}$.

Предположим, что $u(a) = v(a)$. Тогда $u(t), v(t)$ определены на отрезке $[a,b]$, $b - a = 2^{-n}$;

$$u(t) < v(t) \text{ на } (a,b],\ u(a) = v(a),\ \dot{u}(a) = \dot{v}(a); \tag{12}$$

$$\left|\dot{u}(t)\right|,\ \left|\ddot{u}(t)\right|,\ \left|\dot{v}(t)\right|,\ \left|\ddot{v}(t)\right| \le M_n \tag{13}$$

$$\left|u(t)-v(t)\right|,\ \left|\dot{u}(t)-\dot{v}(t)\right| \le d_n \le \varepsilon_n \tag{14}$$

Пусть $m = m_n > 0$ - некоторое целое число, которое будет уточнено позже. Для $i = 0,1,2,...,m$ и $a \le t \le b$ положим

$$u_i(t) = \frac{(m-i)u(t)+iv(t)}{m} = u(t)+[v(t)-u(t)]\frac{i}{m} \tag{15}$$

Тогда $u_0(t) = u(t)$, $u_m(t) = v(t)$ и

$$u(t) \le u_i(t) < u_{i+1}(t) \le v(t),\ a < t \le b, \tag{16}$$

$$u_i(a) = u(a),\ \dot{u}_j(a) = \dot{u}(a),\ i = 0,1,2,...,m. \tag{17}$$

Из неравенств (14) ясно, что

$$\left|u_h - u_i\right| \le \left|h-i\right|\frac{d_n}{m} \le d_n, \tag{18}$$

$$\left|\dot{u}_i\right| \le M_n \left|\dot{u}_i\right| \le M_n,\ \left|\dot{u}_h - \dot{u}_i\right| \le \left|h-i\right|\frac{d_n}{m} \le d_n, \tag{19}$$

$$\left|\ddot{u}_i\right| \le M_n. \tag{20}$$

Для $i = 0,1,2,...,m-1$ и $c = \dfrac{a+b}{2}$ на $\left[c,b\right]$ положим

$$v_i(t) = u_i(t)\sin^2 2^{n+1}\pi(t-c) + u_{i+1}(t)\cos^2 2^{n+1}\pi(t-c) \tag{21}$$

и, поскольку $c-a = b-c = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, получим, что

$$u_i(t) < v_i(t) < u_{i+1}(t) \text{ для } c < t < b, \tag{22}$$

$v_i = u_{i+1}$, $\dot{v}_i = \dot{u}_{i+1}$ при *t=c* $v_i = u_i$, $\dot{v}_i = \dot{u}_i$, при *t=b*. (23)

Равенства (23), содержащие производные , следуют из того, что

$$\dot{v}_i = \dot{u}_i\sin^2 2^{n+1}\pi(t-c) + \dot{u}_{i+1}\cos^2 2^{n+1}\pi(t-c) + 2^{n+1}\pi(u_i - u_{i+1})\sin 2^{n+2}\pi(t-c)\ .\tag{24}$$

Из соотношений (24) и (18)-(20) получаем, что

$$\left|\dot{v}_i\right| \le M_n + 2^{n+1}\pi\frac{d_n}{m} \text{ и } \left|\ddot{v}_i\right| \le M_n + (2^{n+2}+2^{2n+3}\pi)\pi\frac{d_n}{m}. \tag{25}$$

Кроме того, в силу (21) $u_i - v_i = \left(u_{i+1} - u_i\right)\cos^2 2^{n+1}\pi(t-c)$,

так что соотношения (18)-(19) приводят к неравенствам

$$\left|v_i - u_h\right| \le \frac{d_n}{m} \text{ и } \left|v_i' - u_h'\right| \le \left(1+2^{n+1}\pi\right)\frac{d_n}{m} \text{ для } h = i, i+1. \tag{26}$$

Наконец, пусть $m = m_n$ выбрано столь большим, что

$$\left(2^{n+2}+2^{2n+3}\pi\right)\pi\frac{d_n}{m}<\frac{\varepsilon_{n+1}}{3}. \qquad (27)$$

Для того чтобы получить S_{n+1} из S_n, впишем между $u=u(t)$ и $u=v(t)$ дуги $u=u_i(t)$, $i=0,1,...,m$, на $[a,c]$ и дуги $u=u_i(t)$, $i=0,1,...,m$, $u=v_h(t)$, $h=0,1,...,m-1$, на $[a,c]$. Из (19), (20), (25)-(27) ясно, что тогда неравенства (8) и (10) остаются в силе и при замене *n* на *n*+1. Аналогичное утверждение для (11) следует из (19), (26) и (27).

Этим завершается построение последовательности $S_0\subset S_1\subset ...$.

Докажем теперь непрерывность функции $U(t,u)$, определяемой согласно формуле (6). Пусть $p\geq n\geq 0$. Дуги S_n делят плоскость на замкнутые множества *G* вида $G=\left\{(t,u)\middle|\gamma\leq t\leq\delta, u^n(t)\leq u\leq v^n(t)\right\}$, причём ни одна точка из S_n не является внутренней для *G*; каждая из дуг $u=u^n(t)$ и $u=v^n(t)$, $\gamma\leq t\leq\delta$, $\delta-\gamma=2/2^n$ состоит из двух дуг множества S_n.

Пусть $(t_0,u_p)\in G\cap S_p$, и пусть (t^1,u^1)- любая точка границы множества *G*. Оценим разность

$$\Delta p=\left|U_p(t_0,u_p)-u_p(t^1,u^1)\right|$$

Рассмотрим сначала случай *p*=*n*. Тогда (t_0,u_p)находится на границе *G*, и пусть $u_p=u^n(t_0)$. Тогда $\left|U_n(t_0,u_n)-U_n(\gamma,u(\gamma))\right|\leq M_n\left|t_0-\gamma\right|\leq\frac{2M}{2^n}$.

Таким образом, в этом случае $\Delta_p=\Delta_n\leq\frac{4M}{2^n}$.

Пусть *p*>*n*. Можно считать, что $\left(t_0,u_p\right)\in S_p\setminus S_{p-1}$. Пусть $u_n=u^n(t_0)$ и $u_n\leq u_{n+1}\leq...\leq u_p$, где $\left(t_0,u_j\right)$ является наивысшей точкой сегмента $t=t_0$. Тогда в силу неравенства (11)

$$\left|U_p(t_0,u_{j+1})-U_p(t_0,u_j)\right|\leq d_j+\varepsilon_{j+1}\leq 2\varepsilon_j.$$

Отсюда
$$\left|U_p(t_0,u_p)-U_p(t_0,u_n)\right|\leq 2\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j.$$

Если это неравенство объединить с неравенством $\Delta_n\leq\frac{4M}{2^n}$, мы получим, что $\Delta_p\leq\eta_n$, где $\eta_n=\frac{4M}{2^n}+2\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j$.

Теперь нужно доказать, что уравнение (1) имеет непрерывное продолжение на всю (t,u)-плоскость. Ясно, что любая непрерывная дуга $u=u(t)$ на $[c,d]$, составленная из дуг множества *S*, является решением уравнения (1). Если (t_0,u_0) -любая точка множества *G* описанного выше вида, то задача Коши (1) имеет решение $u=u(t)$, $\gamma\le t\le\delta$, удовлетворяющее при $t=\gamma,\delta$ условиям $u=u^n=v^n$. Тогда, используя дуги из S_n, это решение можно продолжить – причём неединственным образом – влево от $t=\gamma$ (вправо от $t=\delta$). Если *n* достаточно велико, отрезок $[\gamma,\delta]$, содержащий t_0, может быть сделан произвольно малым. Утверждение доказано.

§ 2. *Дифференциальные неравенства и их применение*

«Интегрирование» различных дифференциальных неравенств - наиболее важный технический прием, используемый в теории дифференциальных уравнений. В этом параграфе рассмотрим некоторые основные результаты и непосредственные приложения изложенных результатов, в том числе и некоторые теоремы единственности.

Повсюду в этом параграфе *x,y, z* являются элементами *B*-пространства, *f* и *g*-отображения *B*-пространств, а *u, v, U* и *V* - вещественными скалярами.

1.2.1. Дифференциальные неравенства

Пусть $U(t,u)$ - некоторая непрерывная функция на плоском (t,u) множестве *E*. Под *максимальным решением* $u = u^0(t)$ задачи Коши

$$\dot u=U(t,u),\qquad u(t_0)=u_0$$

мы понимаем такое ее решение на максимальном интервале существования, что если $u(t)$ любое решение задачи Коши, то имеет место неравенство $u(t)\le u^0(t)$ для всех *t*, принадлежащих их общему интервалу существования. *Минимальное решение* $u_0(t)$ определяется подобным же образом. Из теоремы Кнезера моментально следует существование максимального и минимального решения, принадлежашего множеству

$H=\{(t,u)\colon t_0\le t\le t_0+a,\ |u-u_0|\le r,\ |U(t,u)|\le M\}$ при $t\in[t_0,t_0+\alpha]$, где $\alpha=\min(a,r/M)$, впрочем их существование можно получить и существенно более простым методом.

При применении дифференциальных неравенств необходима лишь правая производная $D_r(u(t))=\lim\limits_{h\downarrow 0}h^{-1}(u(t+h)-u(t))$. Так, если $u(t)\in C^1[a,b]$, то $|u(t)|$

имеет при $a \le t < b$ правую производную, причем $D_r(|u(t)|) = \dot{u}(t)\operatorname{sign}(u(t))$, если $u(t) \ne 0$, и $D_r(|u(t)|) = |\dot{u}(t)|$, если $u(t) = 0$.

Отметим также, что в пространстве R^n с нормой $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n}(|x_i|)$ функция $\|x(t)\|$, где $x(t) \in C^1[a,b]$, имеет правую производную $D_r\|x(t)\|$ и $|D_r\|x(t)\|| \le \|\dot{x}(t)\|$ для $a \le t < b$.

В этом параграфе рассматриваем банаховы пространства, в которых норма удовлетворяет условию:

Для любой кривой класса $x(t) \in C^1[a,b]$ в равномерном смысле выполнено неравенство $|D_r\|x(t)\|| \le \|\dot{x}(t)\|$ для $a \le t < b$.

Теорема (о дифференциальном неравенстве). Пусть $U(t, u)$ непрерывна в открытом (t, u) -мнсжестве E и $u = u^0(t)$ - максимальное решение задачи Коши

$$\dot{u} = U(t,u), \qquad u(t_0) = u_0 .$$

Пусть функция $v(t)$ непрерывна на $[t_0, t_0 + a]$, удовлетворяет условиям $v(t_0) \le u(t_0)$, $(t, v(t)) \in E$ и имеет в точках $t_0 \le t < t_0 + a$ правую производную $D_r(v(t))$ такую, что

$$D_r(v(t)) \le U(t, v(t)).$$

Тогда на общем интервале существования функций $u^0(t)$) и $v(t)$ выполняется неравенство $$v(t) \le u^0(t).$$

Замечание 1. Если неравенство $D_r(v(t)) \le U(t, v(t))$ заменено противоположным и $v(t_0) \ge u(t_0)$, то утверждение теоремы должно быть заменено неравенством $v(t) \ge u_0(t)$, где $u = u_0(t)$ является минимальным решением задачи Коши. Соответственно, если в теореме функция $v(t)$ непрерывна на отрезке на $[t_0\text{-}a, t_0]$, имеет левую производную $D_l v(t)$ на $(t_0\text{-}a, t_0]$, удовлетворяющую неравенству $D_l(v(t)) \le U(t, v(t))$ и $v(t_0) \ge u(t_0)$, то $v(t) \ge u_0(t)$ на $[t_0\text{-}a, t_0]$.

Замечание 2. Из доказательства теоремы будет ясно, что она верна и в том случае, когда «правая производная» заменена «верхней правой производной», определяемой формулой $\overline{D}_r(u(t)) = \overline{\lim\limits_{h \downarrow 0}} h^{-1}(u(t+h) - u(t))$.

Доказательство теоремы. Очевидно, достаточно показать, что неравенство $v(t) \le u^0(t)$ справедливо на $[t_0, t_0 + \delta]$ для некоторого $\delta > 0$. Действительно, если $u^0(t)$ и $v(t)$ определены на $[t_0, t_0 + \beta]$, то в случае существования такого

$\delta > 0$ множество тех значений t, для которых верно $v(t) \le u^0(t)$, не может иметь верхней границы, отличной от β.

Пусть $n > 0$ достаточно велико, и пусть $\delta > 0$ выбрано независимо от n таким, что задача Коши для уравнения $\dot{u} = U(t,u) + 1/n$, $u(t_0) = u_0$ имеет максимальное решение $u = u_n(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + \delta]$.

Достаточно проверить, что $v(t) \le u_n^0(t)$ на $[t_0, t_0 + \delta]$.

Предположим противное. Тогда существует точка $t = t_1$, $t_0 < t_1 < t_0 + \delta$ такая, что $v(t_1) > u_n^0(t_1)$. Поэтому в полуинтервале $[t_0, t_1)$ существует наибольшее значение $t = t_2$, где $v(t_2) = u_n^0(t_2)$, так что $v(t) > u_n^0(t)$ на $(t_2, t_1]$. Но из неравенств $D_r(v(t_2)) \le U(t, v(t_2)) = U(t, u_n^0(t_2)) < U(t, u_n^0(t_2)) + 1/n = D_r(u_n^0(t_2))$ следует, что $v(t) < u_n^0(t)$ при $t > t_2$, близких к t_2. Это противоречие и доказывает неравенство $v(t) \le u_n^0(t)$. Теорема полностью доказана.

Следствие 1. Пусть $U(t, u)$ и $u^0(t)$ определены, как в теореме о дифференциальном неравенстве. Пусть функция $V(t, u)$ непрерывна на E и удовлетворяет условию $V(t,u) \le U(t,u)$.

Пусть $v = v(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{v}(t) = V(t, v(t)), \qquad v(t_0) = v_0 \le u_0$$

на некотором отрезке $[t_0, t_0 + a]$. Тогда неравенство $v(t) \le u^0(t)$ справедливо справа от точки $t = t_0$ на любом общем интервале существования функций $v(t)$ и $u^0(t)$.

Следствие 2. Пусть функции $U(t,u) \ge 0$ и $u^0(t)$ определены, как в теореме о дифференциальном неравенстве, а $u = u_0(t)$ - минимальное решение задачи Коши $\dot{u} = -U(t,u)$, $\quad u(t_0) = u_0 \ge 0$.

Пусть $x = x(t)$ - некоторая вектор-функция класса C^1, определенная на отрезке $[t_0, t_0 + a]$ и такая, что $u_0 \le \|x(t_0)\| \le u^0$, $(t, \|x(t)\|) \in E$,

$$-\|\dot{x}(t)\| \le D_r \|x(t)\| \le \|\dot{x}(t)\| \text{ и } \|\dot{x}(t)\| \le U(t, \|x(t)\|).$$

Тогда на любом общем интервале существования справедливо неравенство

$$u_0(t) \le \|x(t)\| \le u^0(t).$$

Теорема о дифференциальном неравенстве имеет «интегральный» аналог, в котором, однако, требуется, чтобы U была монотонной относительно u.

Следствие 3. Пусть $U(t, u)$ непрерывна и не убывает относительно u на некотором отрезке $[t_0, t_0+a]$, где u любое. Пусть $u = u^0(t)$ - максимальное решение задачи Коши $\dot{u} = U(t,u)$, $u(t_0) = u_0$ на $[t_0, t_0+a]$.

Пусть на этом же отрезке задана функция $v(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$v(t) \le v_0 + \int_{t_0}^{t} U(s, v(s))ds, \text{ где } v_0 \le u_0.$$

Тогда $v(t) \le u^0(t)$ для $t_0 \le t \le t_0 + a$.

Доказательство. Пусть $V(t)$ обозначает правую часть неравенства, так что $v(t) \le V(t)$ и $\dot{V}(t) = U(t, v(t))$. В силу монотонности U имеем

$\dot{V}(t) \le U(t, V(t))$.

Следовательно, по теореме о дифференциальном неравенстве $V(t) \le u^0(t)$ для $t_0 \le t \le t_0 + a$. Значит, $v(t) \le u^0(t)$, что и требовалось доказать.

Задача. Привести пример, доказывающий существенность условия монотонности функции $U(t, u)$.

В качестве примера приведем следующий вариант неравенства Гронуолла – Беллмана.

Следствие 4. Пусть неотрицательная на отрезке $[0, \alpha]$ функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству $u(t) \le a(t) + \int_0^t b(s)u(s)ds$, где $b(t)$ - неотрицательная интегрируемая функция на $[0, \alpha)$ и $a(t)$ -ограниченная функция на $[0, \alpha)$. Тогда справедливо неравенство

$$u(t) \le \sup_{0 \le s \le t} |a(s)| \exp(\int_0^t b(s)ds).$$

Доказателство. Зададим произвольно $0 \le t_1 < \alpha$ и $0 < h < \alpha - t_1$. Пусть $C = \sup_{0 \le s \le t_1 + h} |a(s)|$. Тогда для всех t ($0 \le t < t_1 + h < \alpha$) выполнено неравенство

$u(t) \le C + \int_0^t b(s)u(s)ds$. Обозначив правую часть неравенства через $V(t)$, имеем $\dot{V}(t) = b(t)u(t) \le b(t)V(t)$, $V(0) = C$. Таким образом,

$$V(t) \le C \exp(\int_0^t b(s)ds)$$

и при $t=t_1$ справедливо неравенство

$$u(t) \le \sup_{0 \le s \le t+h} |a(s)| \exp(\int_0^t b(s)ds).$$

Переходя к пределу при $h \downarrow 0$, полагая, в случае необходимости $a(t) = a(t_1)$ при $t_1 \le t < \alpha$, получаем утверждение следствия.

1.2.2. Теорема Уинтнера

Теорема о дифференциальном неравенстве и ее следствия могут быть использованы для определения интервалов существования решений некоторых дифференциальных уравнений.

Теорема. Пусть $U(t, u)$ непрерывна на множестве $t_0 \le t \le t_0 + a$, $u \ge 0$ и максимальное решение задачи Коши

$$\dot{u} = U(t,u), \qquad u(t_0) = u_0 \ge 0$$

существует на $t_0 \le t \le t_0 + a$ например, пусть $U(t,u) = \varphi(u)$, где $\varphi(u)$ - непрерывная и положительная при $u>0$ функция такая, что

$$\int^{\infty} du / \varphi(u) = \infty.$$

Предположим, что $f(t,x)$ непрерывна в полосе $t_0 \le t \le t_0 + a$ и удовлетворяет условию $\| f(t,x) \| \le U(t, \|x\|)$, а норма такова, что для любой дифференцируемой функции $x(t) \in C^1[a,b]$ выполнено неравенство

$$-\|\dot{x}(t)\| \le D_r \|x(t)\| \le \|\dot{x}(t)\|.$$

Тогда максимальный интервал существования решения задачи Коши

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0, t_0, x_0) = x_0$$

совпадает с $t_0 \le t \le t_0 + a$.

Замечание 1. Ясно, что условие $\int^{\infty} du / \varphi(u) = \infty$ необходимо потребовать только для больших $\|x\|$. Подходящими функциями $\varphi(u)$ являются, например, $\varphi(u) = Cu + b, Cu \cdot \ln(u), Cu \ln(u) \cdot \ln(\ln(u)), \ldots$ (для больших u и постоянной C).

Доказательство. Из условия теоремы и следствия 2 (1.1.1) следует, что на любом интервале, где существует $x(t)$, выполнено неравенство $\|x(t)\| \le u^0(t)$.

Таким образом, правый максимальный интервал существования решения J либо совпадает с $[t_0, t_0 + a]$, либо $J = [t_0, \delta)$, $\delta < t_0 + a$ и $\|x(t)\| \to \infty$ при $t \to \delta$.

Для завершения доказательства остается показать, что если выполнено условие $\int^{\infty} du/\varphi(u)=\infty$, то для $U(t, u)=\varphi(u)$ максимальное решение задачи Коши

$$\dot{u}=\varphi(u), \qquad u(t_0) = u_0 \geq 0$$

существует на $[t_0,t_0 + a]$. Так как $\varphi(u)>0$, то для любого его решения $u(t)$

$$t-t_0=\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{u}(s)ds}{\varphi(u(s))}=\int_{u_0}^{u(t)}\frac{du}{\varphi(u)} \qquad (*)$$

Заметим, что неравенство $\varphi(u)>0$ влечет за собой неравенства $\dot{u}(t)>0$ для $t>t_0$. Решение $u(t)$ не может существовать на отрезке $[t_0,t_0 + a]$ только в том случае, если оно существует в некотором полуинтервале $[t_0,\delta)$ и стремится к ∞ при $t\to\delta$. Это, однако, приводит к противоречию, так как левая часть (*) при $t\to\delta$ стремится к $\delta-t_0$, а правая часть - к ∞. Теорема доказана.

Замечание 2. Рассуждения, примененные при доказательстве теоремы можно использовать и для получения априорных оценок решений $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x}=f(t,x), \qquad x(t_0, t_0, x_0)=x_0.$$

Например, если $\varphi(u)>0$ определена как а теореме, то положив

$$\Phi(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{\varphi(s)}\,\Phi(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{\varphi(s)}, \qquad u\geq u_0\; u\geq u_0,$$

и обозначив через $u=\Psi(v)$ функцию, обратную к $\Phi(u)$, при выполнении условий теоремы получаем, что для решения задачи Коши $x(t)$ верна оценка $\|x(t)\|\leq\Psi(t-t_0)$.

п.1.2.2. Теоремы единственности

Одно из основных применений теоремы о дифференциальном неравенстве и ее следствий состоит в получении теорем единственности.

Теорема 1. Пусть $f(t, x)$ непрерывна в множестве

$$H=\{(t,x):\ t_0\leq t\leq t_0 + a,\ \|x-x_0\|\leq r\}.$$

Пусть $\omega(t,u)$ - непрерывная (скалярная) функция на $H_0=\{(t,u):\ t_0\leq t\leq t_0 + a,\ 0\leq u\leq 2r\}$, обладающая следующими свойствами:

1) $\omega(t,0)=0$;
2) единственным решением $u=u(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{u}=\omega(t,u),$$

удовлетворяющим на любом полуинтервале $(t_0,t_0+\varepsilon]$ условиям:

$$u(t) \to 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{u(t)}{t-t_0} \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \downarrow t_0,$$

является функция $u(t) \equiv 0$. Пусть для точек $(t, x_1), (t, x_2)$ имеет место неравенство $\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \le \omega(t, \| x_1 - x_2 \|)$.

Тогда задача Коши $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$

на любом отрезке $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ имеет не более одного решения

Доказательство. Из того факта, что $\omega(t, 0) = 0$; $t_0 < t < t_0 + a$, следует, конечно, что функция $u(t) = 0$ является решением уравнения $\dot{u} = \omega(t, u)$.

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ задача Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \;\; x(t_0, t_0, x_0) = x_0$$

имеет на $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ два различных решения: $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Положим $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Уменьшая, если это необходимо, ε, можно считать, что $x(t_0 + \varepsilon) \ne 0$ и $\| x(t_0 + \varepsilon) \| < 2r$. Кроме того, $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$ и $\| \dot{x} \| \le \omega(t, \| x(t) \|)$.

Из следствия 2 (п.1.2.1) вытекает, что если $u = u_0(t)$ - минимальное решение задачи Коши

$$\dot{u} = \omega(t, u), \qquad u(t_0 + \varepsilon) = \| x(t + \varepsilon) \|,$$

где $0 < \| x(t_0 + \varepsilon) \| < 2r$, то $\| x(t) \| \ge u_0(t)$ на любом интервале, лежащем в $(t_0, t_0 + \varepsilon]$, на котором существует $u_0(t)$. Отметим, что $u_0(t)$ можно продолжать как минимальное решение влево от $t_0 + \varepsilon$ до тех пор, пока при некоторых значениях t точка $(t, u_0(t))$ не подойдет как угодно близко к какой-либо точке из ∂H_0. В процессе этого продолжения неравенство $\| x(t) \| \ge u_0(t)$ остается справедливым, так что при некоторых t точка $(t, u_0(t))$ подходит как угодно близко к точке вида $(\delta, 0) \in \partial H_0$, где $\delta \ge t_0$. Если $\delta > t_0$, то из условия $\omega(t, 0) = 0$ видно, что $u_0(t)$ можно продолжить на весь интервал $(t_0, t_0 + \varepsilon]$, считая $u_0(t) = 0$ для $t \in (t_0, \delta]$. Таким образом, левый максимальный интервал существования $u_0(t)$ есть $(t_0, t_0 + \varepsilon]$. Но из $\omega(t, 0) = 0$ и $\| x(t) \| \ge u_0(t)$) следует, что $u(t) \to 0$ и $\dfrac{u(t)}{t - t_0} \to 0$ при $t \downarrow t_0$. В силу предположения теоремы относительно уравнения $\dot{u} = \omega(t, u)$ имеем $u_0(t) \equiv 0$. Поскольку это противоречит начальному условию $u(t_0 + \varepsilon) = \| x(t + \varepsilon) \|$, теорема доказана.

Следствие 1 (критерий Нагумо). Если t_0 = 0, то функция $\omega(t,u) = u/t$ удовлетворяет условиям доказанной теоремы, т.е. утверждение теоремы справедливо при выполнении неравенства

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le \|x_1 - x_2\|/(t - t_0)$$

для $(t,x_1),(t,x_2) \in H, t > t_0$.

Следствие.2 (критерий Осгуда). Если t_0 = 0, то в качестве $\omega(t,u)$ в условиях теоремы можно взять функцию $\omega(t,u) = \phi(t)\cdot\varphi(u)$, где $\phi(t) \ge 0$ и непрерывна на $0 < t \le a$; $\varphi(u)$ непрерывна для u>0, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$ и

$$\int_{0+} \phi(s)ds < \infty, \int_{0+} du/(\varphi(u)) = \infty.$$

Заметим, что условие непрерывности $\phi(t)$ в этом следствии может быть ослаблено. Можно непосредственно доказать, что соответствующая теорема единственности верна и в предположении интегрируемости $\phi(t)$.

Следующая теорема включает «одностороннее неравенство» и дает «одностороннюю единственность».

Теорема 2. Пусть $f(t, x)$ непрерывна в области $t_0 \le t \le t_0 + a$, $\|x - x_0\| \le r$ вещественного гильбертова пространства.

Пусть $$(f(t,x_2) - f(t,x_1), x_2 - x_1) \le 0,$$

для $t_0 \le t \le t_0 + a$, $\|x_i - x_0\| \le r$, i=1,2.

Тогда задача Коши

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0, t_0, x_0) = x_0$$

имеет на любом отрезке $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ не более одного решения.

Доказательство теоремы 2. Пусть $x_1(t), x_2(t)$ - решения задачи Коши на $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. Обозначим через $\delta(t) = \|x_2(t) - x_1(t)\|^2 = (x_2(t) - x_1(t), x_2(t) - x_1(t))$ квадрат вектора $x_2(t) - x_1(t)$, так что $\delta(t_0) = 0$, $\delta(t) \ge 0$. Но согласно условию $\dot{\delta}(t) = 2(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t), x_2(t) - x_1(t)) = 2(f(t,x_2) - f(t,x_1), x_2 - x_1) \le 0$. Следовательно, $\delta(t) = 0$ на $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, что и требовалось доказать.

§ 3. Зависимость от начальных условий и параметров

1.3.1. Предварительные замечания

Часто встречается следующая ситуация, когда задается некоторое семейство задач Коши

$$\dot{x} = f(t,x,a), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad (*)$$

зависящее от множества параметров, причем для каждого фиксированного $a \in A$ - некоторому топологическому пространству параметров. Задача (*) имеет единственное решение $x(t) = x(t, t_0, x_0, a)$. В большинстве случаев вопрос о зависимости решений задачи без параметров от t и (t_0, x_0) может быть сведен к вопросу о зависимости от t и a решений семейства задач Коши (*) при *фиксированном* начальном условии $x(t_0) = 0$. Это сведение осуществляется заменой переменных $(t,x) \to (t-t_0, x-x_0)$, превращающей задачу без параметров в задачу $\dot{x} = f(t-t_0, x-x_0), \quad x(0)=0$, в которой значения $a = (t_0, x_0)$. Обратно, вопрос о зависимости решений задач (*) от t, t_0, x_0 и a может быть сведен к вопросу о гладкости решений такой задачи Коши, в которой нет зависимости от внешнего параметра a. Такое сведение получается заменой задачи (*) задачей Коши

$$\dot{x} = f(t,x,y), \quad \dot{y} = 0, \quad x(t_0) = x_0 \,, \; y(t_0) = a$$

для вектора (x, y), принадлежащего некоторому банаховому пространству, и в которой уже нет внешнего параметра, причем здесь в качестве (t_0, x_0, y_0) берется любой возможный набор значений (t, x, a). По этой причине некоторые из приводимых ниже теорем будут сформулированы для задачи (*), но доказательства их будут даны применительно к задаче без параметров.

п.1.3.2. Непрерывность

Предположение о единственности решения влечет за собой непрерывность общего решения $x(t) = x(t, t_0, x_0, a)$ уравнения $\dot{x} = f(t,x,a)$. В том случае, когда единственность гарантирована условием Липшица и применением принципа сжатых отображений, непрерывность вытекает из следствия (0.2.2)

Теорема . Пусть функция $f(t, x, a)$ непрерывна на открытом (t, x, a) - множестве $E \subseteq I \times X \times A$, и пусть для каждого $(t_0, x_0, a) \in E$ задача Коши (*) с фиксированным a имеет единственное решение $x(t) = x(t, t_0, x_0, a)$. Пусть $\alpha < t < \omega$ является максимальным интервалом существования решения $x(t) = x(t, t_0, x_0, a)$. Тогда $\omega = \omega(t_0, x_0, a_0)$ (или $\alpha = \alpha(t_0, x_0, a_0)$) является полунепрерывной снизу (сверху) функцией от $(t_0, x_0, a) \in E$, а $x(t, t_0, x_0, a)$ непрерывна на множестве $\alpha < t < \omega$, $(t_0, x_0, a) \in E$.

Ясно, что ω (α) может принимать значение $+\infty$ ($-\infty$). Полунепрерывность снизу (сверху) функции $\omega = \omega(t_0, x_0, a_0)$ ($\alpha = \alpha(t_0, x_0, a_0)$) в точке $(t_0, x_0, a) \in E$

означает, что $\omega(t_0, x_0, a_0) \le \underline{\lim}\, \omega(t_1, x_1, a_1) \quad (\alpha(t_0, x_0, a_0) \ge \overline{\lim}\, \alpha(t_1, x_1, a_1))$

при $(t_1, x_1, a_1) \to (t_0, x_0, a_0)$.

Доказательство. Так как задача (*) может быть заменена задачей без параметров, то без потери общности можно предположить, что f не зависит от a. Итак, будем считать, что $f(t, x)$ определена на открытом (t, x)- множестве E и что задача без параметров имеет единственное решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ на максимальном интервале существования $\alpha < t < \omega$, где $\omega = \omega(t_0, x_0)$ ($\alpha = \alpha(t_0, x_0)$).

Для того чтобы убедиться в том, что функция $\omega = \omega(t_0, x_0)$ является полунепрерывной снизу, выберем в E последовательность точек (t_1,x_{10}), (t_2,x_{20}),),…, таких, что $(t_n, x_{n0}) \to (t_0, x_0) \in E$ и $\omega(t_n, x_{n0}) \to c(\le \infty)$ при $n \to \infty$, где $c = \underline{\lim}_{n\to\infty} \omega(t_n, x_{n0})$. Так как решение задачи Коши (*) единственно, то

$c \ge \omega(t_0, x_0)$, а это и означает полунепрерывность снизу функции $\omega = \omega(t_0, x_0)$.

Доказательство полунепрерывности сверху функции $\alpha = \alpha(t_0, x_0)$ проводится аналогично. Доказательство теоремы тем самым завершено.

п.1.3.3. Дифференцируемость

В этом пункте для простоты изложения считаем, что пространства конечномерны. Если предположить, что $f(t,x,a)$ принадлежит классу C^1, то общее решение $x(t, t_0, x_0, a)$ задачи (*) тоже принадлежит классу C^1. Этот результат, даже в более сильной форме, содержится в следующей теореме.

Теорема . (Пеано). Пусть функция $f(t,x,a)$ непрерывна в открытом (t, x, a) - множестве E и обладает там непрерывными частными производными $\partial f / \partial x^i$, $\partial f / \partial a^j$ по компонентам векторов x и a. Тогда

(1) единственное решение $x(t, t_0, x_0, a)$ задачи (*) принадлежит классу C^1 в открытой области его определения $\alpha < t < \omega$, от $(t_0, x_0, a) \in E$;

(2) если $J(t)=J(t, t_0, x_0, a)$ обозначает матрицу Якоби $(\partial f / \partial x)$, вычисленную в точке $x(t, t_0, x_0, a)$ т.е. $J(t)=J(t, t_0, x_0, a) =((\partial f / \partial x)|_{x=x(t,t_0,x_0,a)}$, то

а) $y(t) = \partial x(t, t_0, x_0, a) / \partial x_0^i$ является решением задачи Коши

$$\dot{y} = J(t) y, \qquad y(t_0)=e_i,$$

где $e_i = (e_i^1, ..., e_i^n)$ и $e_i^j = \delta_i^j$;

(б) $z(t) = \partial x(t, t_0, x_0, a) / \partial a^j$ является решением задачи Коши

$$\dot{z} = J(t) z + g_j(t), \qquad z(t_0)=0$$

где $g_j(t) = \partial f(t, x, a) / \partial a^j$ производная, вычисленная в точке $x(t, t_0, x_0, a)$;

(в) производная $\partial x(t,t_0,x_0,a)/\partial t_0$ определяется формулой

$$\partial x(t,t_0,x_0,a)/\partial t_0 = -\sum_{i=1}^{n} \partial x(t,t_0,x_0,a)/\partial x_0^i \cdot f^i(t_0,x_0,a).$$

Заметим, что утверждения (а)-(в) формально получаются как результат дифференцирования обеих частей уравнений задачи (*), т.е. уравнений

$$\dot{x}(t,t_0,x_0,a) = f(t, x(t,t_0,x_0,a),a), \quad x(t,t_0,x_0,a) = x_0,$$

и в доказательстве нуждается лишь обоснование соответствующих предельных переходов.

Уравнение $\dot{y} = J(t)y$ для задачи(*) называется ***уравнением в вариациях***.

Предварительно отметим, что для непрерывной функции $f(t, y)$, заданной на множестве $(a,b)\times K$, где K - открытое выпуклое y-множество в R^n, и имеющей непрерывные частные производные $\partial f/\partial y^k$ по компонентам, y справедлива формула $f(t,y_2) - f(t,y_1) = \sum_{k=1}^{n}(\int_0^1 \frac{\partial f(t, sy_2 + (1-s)y_1)}{\partial y^k} ds)(y_2^k - y_1^k)$.

Эту формулу называют формулой Адамара. Доказательство моментально следует из рассмотрения функции $F(s) = f(t, sy_2 + (1-s)y_1)$, где $0 \le s \le 1$,

$F(1) - F(0) = f(t,y_2) - f(t,y_1)$ и $\frac{dF}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(t, sy_2 + (1-s)y_1)}{\partial y^k}(y_2^k - y_1^k)$.

Доказательство теоремы . Так как задачу (*) можно заменить задачей

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

то при доказательстве существования и непрерывности частных производных решения $x(t, t_0, x_0)$ без потери общности можно считать, что $f(t,x)$ не зависит от a. Так как утверждения теоремы имеют локальный характер, то ясно, что их достаточно доказать для внутренних точек множества $\alpha < a < t < b < \omega$ и (t_1, x_1), достаточно близких к (t_0, x_0).

а) Докажем сначала существование производной $y(t) = \partial x(t,t_0,x_0,a)/\partial x_0^i$.

Пусть h - некоторый скаляр и e_i - вектор, входящий в 2.а). Для малых $|h|$ положим $x_h(t)=x(t, t_0, x_0+he_i)$. Функция $x_h(t)$ определена на $[a,b]$ и $x_h(t) \to x_0(t)$ при $h \to 0$ равномерно на $[a,b]$. Таким образом,

$(x_h(t) \dot{-} x(t)) = f(t, x_h(t)) - f(x(t))$. Применяя формулу Адамара и, учитывая что $y_2=x_h(t)$, $y_1=x_0(t)$ получаем

$$(\dot{x_h(t) - x_0(t)}) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t, x_h^k(t), x_0^k(t)) \cdot (x_h^k(t) - x_0^k(t)).$$

Обозначим $y_h(t) = \dfrac{x_h(t) - x_0(t)}{h}, \quad h \neq 0$.

Существование производной $y(t) = \partial x(t, t_0, x_0) / \partial x_0^i$ эквивалентно существованию $\lim\limits_{h\to 0} y_h(t)$. Отметим, что $y_h(t_0) = e_i$. Значит, функция $y(t) = y_h(t)$ является решением задачи Коши $\dot{y} = J(t,h)y(t)$, $y(t_0) = e_i$, где $J(t, h)$ обозначает $(n \times n)$-матрицу, в которой i-ая строка есть вектор $f_i(t, x_h^i(t), x_0^i(t))$. Из формулы Адамара, непрерывности $f_i(t, y_2, y_1)$ следует, что $\lim\limits_{h\to 0}(J(t,h) = J(t,0)$ равномерно относительно $t \in [a,b]$, где $J(t,0)$=$((\partial f / \partial x)|_{x=x(t,t_0,x_0,a)}$.

Будем рассматривать задачу $\dot{y} = J(t,h)y(t)$, $y(t_0) = e_i$, как семейство задач Коши, зависящее от параметра h, причем правая часть $J(t; h)y$ этого дифференциального уравнения непрерывна на открытом множестве $a < t < b$, $|h|$ мало и y произвольно. Так как решения задачи $\dot{y} = J(t,h)y(t)$, $y(t_0) = e_i$ единственны, то оно является непрерывной функцией от h (при фиксированных (t, t_0)). В частности, $y(t) = \lim\limits_{h\to 0} y_h(t)$ существует и является решением задачи ($\dot{y} = J(t,h)y(t)$, $y(t_0) = e_i$) в интервале $a < t < b$. Отсюда следует существование производной $y(t) = \partial x(t, t_0, x_0) / \partial x_0^i$.

Для проверки непрерывности этой производной по всем ее аргументам перепишем уравнение из 2.а) следующим образом:

$$\dot{y} = J(t, t_0, x_0)y, \quad y(t_0)=e_i,$$

т.е. как семейство задач Коши, зависящее от параметра (t_0,x_0). Поскольку $J(t, t_0, x_0)$ является непрерывной функцией от (t, t_0, x_0) и задача Коши для линейного уравнения имеет единственное решение, то функция $y(t) = \partial x(t, t_0, x_0, a) / \partial x_0^i$ непрерывна по всем его аргументам.

б) Докажем теперь существование и непрерывность производной $\partial x(t, t_0, x_0, a) / \partial t_0$. Положим $z_h(t) = h^{-1}(x(t, t_0 + h, x_0) - x(t, t_0, x_0)$.

Решение задачи Коши $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x(t_0, t_0 + h, x_0)$, совпадает с решением задачи Коши $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0 + h) = x_0$, т.е.

$$x(t, t_0 + h, x_0) = x(t, t_0, x(t_0, t_0 + h, x_0)).$$

Поэтому $h \cdot z_h(t) = x(t, t_0, x(t_0, t_0 + h, x_0)) - x(t, t_0, x_0)$.

Так как $x(t,t_0,x_0)$ имеет по компонентам x_0 непрерывные частные производные и $\lim\limits_{h\to 0}(x(t_0,t_0+h,x_0)-x(t_0,t_0,x_0))=0$, то

$$h\cdot z_h(t)=\sum_i\left(\frac{\partial x(t,t_0x_0)}{\partial x_0^i}+o(1)\right)\cdot(x^i(t_0,t_0+h,x_0)-x_0^i),\ \text{когда}\quad h\sim 0\,.$$

Из теоремы Лагранжа (о конечном приращении) и равенства $x(t_0+h,t_0+h,x_0)=x_0$ следует, что существуют c_i ($0<c_i<1$) такие, что $x^i(t_0,t_0+h,x_0)-x_0^i=-h(\dot{x}^i(t_0+c_ih,t_0+h,x_0)$, $\quad i=1,\ldots n$.

Функцию $\dot{x}^i(t_0+c_ih,t_0+h,x_0)=f^i(t_0+c_ih,x^i(t_0+c_ih,t_0+h,x_0))$ при $h\sim 0$ можно представить как $f^i(t_0+c_ih,x^i(t_0+c_ih,t_0+h,x_0))=f^i(t_0,x_0)+o(1)$.

Поэтому при $h\sim 0$ имеем

$$z_h(t)=-\sum_i\left(\frac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial x_0^i}+o(1)\right)\cdot(f^i(t_0,x_0)+o(1))\,.$$

Отсюда видно, что $\lim\limits_{h\to 0}z_h(t)$ существует, равен $\partial x(t,t_0,x_0,a)/\partial t_0$ и удовлетворяет соотношению

$$\partial x(t,t_0,x_0,a)/\partial t_0=-\sum_{i=1}^{n}\partial x(t,t_0,x_0,a)/\partial x_0^i\cdot f^i(t_0,x_0,a)\,.$$

Из этого соотношения следует, что $\partial x(t,t_0,x_0,a)/\partial t_0$ является непрерывной функцией от (t,t_0,x_0). Теорема доказана.

Г Л А В А 2

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

§ 1. Многообразия

2.1.1. Определения

Определение 1. Хаусдорфово пространство M со счетной базой называется ***n-мерным многообразием***, если оно локально гомеоморфно n-мерному евклидовому пространству R^n.

Под локальной гомеоморфностью мы подразумеваем, что каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью, гомеоморфной R^n (или некоторому открытому подмножеству в R^n). Теперь мы присоединим к топологии в M специальный класс функций.

Определение 2. Дифференцируемая структура класса C^k (аналитическая структура) на n-мерном многообразии M есть набор F вещественных функций, каждая из которых определена на открытом подмножестве в М, причем выполнены следующие условия:

1) если $U \subset V$ и функция $f \in F$ определена на V, то ограничение f на U принадлежит F $\left(f|U \in F\right)$;
2) если $U = \bigcup U_\alpha$, f определена на U и $f|U_\alpha \in F$ для всех α, то $f \in F$;
3) для каждой точки $p \in M$ имеются её окрестность U и такой гомеоморфизм h окрестности U на открытое множество в R^n, что функция f, определенная на открытом подмножестве в U, принадлежит F тогда и только тогда, когда $f \circ h^{-1}$ как функция n вещественных переменных есть функция класса C^k(аналитическая функция).

Первые два условия требуют, чтобы ограничения и объединения функций из F являлись допустимыми операциями. Третье условие требует, чтобы любая функция $f \in F$ была дифференцируемой в некоторой системе координат.

Определение 3. Открытое множество W и гомеоморфизм h, удовлетворяющий условию 3) определения 2 (относительно дифференцируемой структуры F) называются соответственно ***координатной окрестностью*** и ***координатным отображением***. Если $h(p) = (x^1(p),\dots,x^n(p))$, то функции $x^i(\cdot)$ называются ***локальными координатами.***

В соответствии с определением 2 каждая точка многообразия M обладает окрестностью U с координатным отображением h. Множества $\{U\}$ образуют открытое покрытие многообразия M. Благодаря предположению о счетности мы можем выбрать счетное подпокрытие $\{U_i\}$ с координатными отображениями $\{h_i\}$. Предыдущие рассуждения (примененные к $p \in U_i \bigcap U_j$, $V = U_i \bigcap U_j$) показывают, что отображение $h_i \circ h_j^{-1}$ задаётся дифференцируемыми функциями с необращающимся в нуль якобианом.

Определение 4. Многообразие M вместе с дифференцируемой структурой F называется ***дифференцируемым многообразием***.

Определение 5. Пусть U – открытое подмножество многообразия M, и пусть h – взаимно однозначное отображение множества U в R^n. Пара (U,h) называется ***координатной картой*** (*локальной системой координат*), если $h_i \circ h^{-1}$ есть дифференцируемое отображение множества $h(U \bigcap U_i)$ на $h_i(U \bigcap U_i)$, якобиан которого нигде не обращается в нуль.

Условие, что (U, h) есть карта, очевидно, не зависит от набора (U_i, h_i), а зависит только от дифференцируемой структуры многообразия M.

Функции $x^i \circ h$ (где $(x^1,..., x^n)$ – координаты в R^n) называются *координатами* карты (U,h).

Определение 6. Набор карт (U_i, h_i) такой, что $M = \bigcup U_i$, называется атласом многообразия M.

Если M_1 и M_2 – многообразия размерности соответственно n_1 и n_2, то $M_1 \times M_2$ есть многообразие. Действительно, если $U_1 \subset M_1$ и $U_2 \subset M_2$ гомеоморфны открытым подмножествам в R^{n_1} и R^{n_2}, то $U_1 \times U_2$ гомеоморфно открытому подмножеству в $R^{n_1+n_2}$. Предположим, что F_1 и F_2 – дифференцируемые структуры на M_1 и M_2. Пусть $\{U_{1j}\}$ и $\{U_{2j}\}$ – покрытия M_1 и M_2 координатными окрестностями с координатными отображениями h_{1j} и h_{2j}. Тогда множества $\{U_{1i} \times U_{2j}\}$ образуют открытое покрытие многообразия $M_1 \times M_2$. Отображение $h_{ij}(p,q): U_{1i} \times U_{2j} \to R^{n_1+n_2}$, определенное формулой

$$h_{ij}(p,q) = h_{1i}(p) \times h_{2j}(q),$$

является гомеоморфизмом. Кроме того, $h_{ij} \circ h_{kl}^{-1} = h_{1i} \circ h_{1k}^{-1} \times h_{2j} \circ h_{2l}^{-1}$ есть, очевидно, дифференцируемое отображение с ненулевым якобианом. Поэтому система окрестностей $\{U_{1i} \times U_{2j}\}$ и отображений h_{ij} определяет дифференцируемую структуру на $M_1 \times M_2$. Эта структура называется произведением структур F_1 и F_2. Многообразие $M_1 \times M_2$ с этой дифференцируемой структурой называется ***произведением дифференцируемых многообразий*** M_1 и M_2.

2.1.2. Примеры дифференцируемых многообразий.

1. Евклидово пространство R^n (или любое его открытое подмножество), очевидно, является дифференцируемым многообразием. Оно покрыто единственной координатной окрестностью.

2. Пусть S^n (n-мерная сфера) – множество всех точек из R^{n+1}, удовлетворяющих условию $(x^1)^2 + ... + (x^{n+1})^2 = 1$.

Пусть U_i^+ обозначает подмножество в S^n, где $x^i > 0$, а U_i^- – подмножество, где $x^i < 0$. Возьмем в качестве координат на $U_i^\pm$ остальные x^j. $U_i^\pm$ покрывают S^n и координатные отображения удовлетворяют требуемым условиям.

3. Пусть $T^n = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$ (n раз). Многообразие T^n называется n-мерным тором.

4. Пусть $T(m,n)$ – пространство всех ($m\times n$)– матриц. Тогда $T(m,n)$ можно рассматривать как R^{nm} и, следовательно, считать аналитическим многообразием. Пусть $T(m,n;k)$ обозначает пространство всех матриц ранга k (где $0 < k \le \min(m,n)$) с индуцированной топологией. Тогда $T(m,n;k)$ есть аналитическое многообразие размерности $k(m+n-k)$. Действительно, пусть $X_0 \in T(m,n)$. Если rang$(X_0)\geq k$, то существуют такие матрицы подстановок координат P и Q, что

$$PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

где A_0 – невырожденная матрица порядка k. Далее, существует такое $\varepsilon>0$, что если все элементы матрицы A-A_0 меньше ε, то матрица A невырожденна. Пусть U^* – множество тех $X \in T(m,n)$, для которых

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где все элементы матрицы A-A_0 по модулю меньше ε. Тогда U^* – открытое множество в $T(m,n)$. Если $X \in U^*$, то $X \in T(m,n;k)$ тогда и только тогда, когда $D = CA^{-1}B$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что матрица

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(где I_j – единичная матрица порядка j) имеет тот же ранг, что и матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, поскольку матрица $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}$ невырожденна; но матрица в правой части (*) имеет ранг k тогда и только тогда, когда $D=CA^{-1}B$. Возьмем в качестве координатной окрестности точки $X \in T(m,n;k)$ множество $U = U^* \bigcap T(m,n;k)$, открытое в индуцированной топологии. Определим координатное отображение h, полагая

$$h(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

где мы рассматриваем евклидово пространство $R^{k^2+k(m-n)+k(n-k)} = R^{k(m+n-k)}$ как пространство всех матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$. Отображение h^{-1} задается формулой

$$h^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Функции перехода $h' \circ h^{-1}$ для двух перекрывающихся окрестностей U и U' задаются формулой

$$h' \circ h^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & 0 \end{pmatrix}, \qquad (**)$$

где

$$P' P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}Q' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}.$$

Поскольку все матрицы, входящие в (**), являются аналитическими (и даже рациональными) функциями своих аргументов (так как A невырожденна), координатные окрестности и отображения определяют на $T(m,n;k)$ аналитическую структуру размерности $k(m+n-k)$.

Пусть $F(m,V)$ – множество всех упорядеченных наборов m линейно независимых векторов в вещественом пространстве V [$F(m,V)$ называется пространством m-реперов пространстваV]. Тогда $F(m,V)$ есть дифференцируемое многообразие размерности mn. Действительно, выбор базиса пространства V позволяет отождествить $F(m,V)$ с $T(m,n;m)$.

5. Пусть V есть n–мерное векторное пространство и $G(p,V)$ – множество p - мерных подпространств из V. Мы утверждаем, что $G(p,V)$ можно превратить в аналитическое многообразие (грассманово многообразие пространства V) размерности $p(n\text{-}p)$. В самом деле, пусть $v^{1*},...,v^{n*}$ - базис V^*. Если $v^* \in V^*$ и $E \in G(p,V)$, то через v^*_E мы будем обозначать ограничение v^* на E. Обозначим через $U^{i_1,...,i_p}$ $(1 \le i_1 < i_2 < ... < i_p \le n)$ множество тех p - плоскостей E, для которых векторы $v_E^{i_1*},...,v_E^{i_p*}$ линейно независимы. Пусть $(j_1,\dots,j_{n-p})$ – множество индексов, дополнительное к $(i_1,\dots,i_p)$, причем $j_1<\dots<j_{n-p}$. Тогда

$$v_E^{j_k*} = \sum_1^p h_l^k v_E^{i_l*},$$

если $E \in U^{i_1,...,i_p}$. Пусть $\Phi^{i_1,...,i_p} : U^{i_1,...,i_p} \to R^{p(n-p)}$ – отображение, сопостовляющее каждому подпространству E коэффициенты (h_l^k). Отображения $\Phi^{i_1,...,i_p}$ взаимно однозначны. Они определяют на $G(p,V)$ структуру аналитического многообразия.

2.1.3. Касательное расслоение

При изучении дифференцируемых многообразий полезно рассматривать различные «инфинитезимальные» объекты. Рассмотрим понятие касательного вектора на многообразии. В классическом векторном анализе понятие касательного вектора к кривой определяется непосредственным образом.

Если $\varphi(t) = (\varphi^1(t),...,\varphi^n(t))$ есть кривая в R^n, причем $\varphi(0) = p$, то касательный вектор к кривой φ в точке p имеет вид $(\dot\varphi^1(0),...,\dot\varphi^n(0))$. Две кривые φ и ϕ имеют один и тот же касательный вектор, если $\dot\varphi^i(0) = \dot\phi(0)$ для всех i. Однако, на многообразии мы не можем записать любую кривую как набор n функций одной переменной, пока не выбрана локальная система координат. Тем не менее, мы можем определить касательный вектор в точке p более абстрактным образом как класс эквивалентных кривых, проходящих через точку p, причем две кривые считаются эквивалентными, если в точке p они имеют одинаковые производные в одной, а значит, и во всех системах координат, заданных вблизи p.

Пусть Си (M) есть множество всех пар (p, φ), где $p \in M$, а φ - такое дифференцируемое отображение интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ в M, что $\varphi(0) = p$. Таким образом, Си (M) есть пространство всех кривых на M. Существует очевидное отображение π: Си (M) $\rightarrow$ M, определяемое формулой $\pi(p, \varphi) = p$. Введем в пространстве Си *(M)* следующее отношение эквивалентности: $(p,\varphi) \sim (p',\varphi')$, если

$p = p'$ и $\frac{d(x^i(\varphi(t)))}{dt}|_{t=0} = \frac{d(x^i(\varphi'(t)))}{dt}|_{t=0}$, где ($x^1$, . . ., x^n) - некоторая система координат вблизи p.

Заметим, что если функции $y^i = y^i(x^1,...,x^n)$ определяют другую систему координат вблизи p, то $\frac{d(y^i(\varphi(t)))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{d(x^j(\varphi(t)))}{dt}$.

Поэтому введенное отношение эквивалентности не зависит от системы координат. Обозначим пространство классов эквивалентности пространства Си (M) через T (M). Элемент X из T (M) (т.е. класс эквивалентности пространства Си (M)) называется ***касательным вектором***. Говорят, что элемент $(p,\varphi) \in X$ касается вектора X. Очевидно, что отображение π постоянно на классах эквивалентности и, значит, индуцирует отображение, которое мы снова будем обозначать через π, пространства T (M) в M. Если $X \in T(M)$ и $\pi(X) = p$, то мы говорим, что X есть касательный вектор в точке p. Множество $\pi^{-1}(p)$ обозначается $T_p(M)$ и называется ***касательным пространством многообразия*** M в точке p. Заметим, что выбор системы координат вблизи p индуцирует отображение T_p (M)$\rightarrow$ R^n. Действительно, пусть h =(x^1,…, x^n) - координаты вблизи p и $X \in T_p(M)$. Пусть (p,φ) касается вектора X. Положим

$$\bar{h}(X) = (X^1,...,X^n), \qquad X^i = \frac{d(x^i(\varphi(t)))}{dt}|_{t=0}.$$

Отображение $\bar{h}: T_p(M) \rightarrow R^n$, очевидно, взаимно однозначно. Покажем, что $\bar{h}: T_p(M) = R^n$. Действительно, если (X^1,…, X^n)$\in$ R^n, то определим кривую $\varphi(t)$, полагая $\varphi(t) = h^{-1}(h(p)) + t(X^1,...,X^n)$.

Непосредственное вычисление показывает, что $\bar{h}(Y) = (X^1, \ldots, X^n)$, где Y- вектор, которого касается пара (p,φ). Если $h' = (y^1,\ldots, y^n)$ - другая система координат и отображение $h' \circ h^{-1}$ задается функциями

$y^1(x^1,\ldots,x^n),\ldots,y^n(x^1,\ldots,x^n)$, то $\overline{h'}(Y)=(Y^1,\ldots,Y^n)$, где $Y^i=\sum_j\frac{\partial y^i}{\partial x^j}X^j$

(частные производные берутся в точке $h(p)$). Таким образом, $\overline{h'}\circ\overline{h}^{-1}$ есть линейное отображение пространства R^n на R^n. Это означает, что мы имеем на $T_p(M)$ *каноническую структуру векторного пространства*. Действительно, если a и b - вещественные числа, а $X,Y\in T_p(M)$, то положим

$$aY+bX=\overline{h}^{-1}(a\overline{h}(Y)+b\overline{h}(X)).$$

Поскольку отображение $\overline{h'}\circ\overline{h}^{-1}$ линейно, структура векторного пространства, определенная на $T_p(M)$, не зависит от выбора h. Отображение h является изоморфизмом векторного пространства $T_p(M)$ на R^n.

Пусть F_U обозначает (линейное) пространство всех дифференцируемых функций, определенных на $U\subset M$.

Введем понятие производной функции f по направлению касательного вектора X_p в точке p.

Теорема. Каждому касательному вектору X_p на многообразии M соответствует единственная линейная функция $L_{X(p)}$, определенная на F_U для любого открытого множества U, содержащего p. Эта линейная функция удовлетворяет условию $L_{X(p)}(fg)=f(p)L_{X(p)}(g)+g(p)L_{X(p)}(f)$ для всех $f,g\in F_U$.

Если $L_{X(p)}=L_{Y(p)}$, то $X_p=Y_p$. Кроме того, $L_{aX(p)+bY(p)}=aL_{X(p)}+bL_{Y(p)}$.

Если M - аналитическое или класса C^∞ многообразие, а L - линейный функционал, определенный на F_U, удовлетворяющий условию $L(fg)=f(p)L(g)+g(p)L(f)$ для некоторой координатной окрестности U точки p, то существует единственный вектор $X_p\in T_p(M)$ такой, что $L=L_{X(p)}$.

Доказательство. Пусть (p,φ) касается вектора X_p. Определим $L_{X(p)}$ формулой

$$L_{X(p)}(f)=\frac{df(\varphi(t))}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Легко проверяется, что $L_{X(p)}$ удовлетворяет условию

$$L_{X(p)}(fg)=f(p)L_{X(p)}(g)+g(p)L_{X(p)}(f).$$

Если $(p,\varphi)\sim(p',\varphi')$, то $\frac{d(f(\varphi(t)))}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{d(f(\varphi'(t)))}{dt}\Big|_{t=0}$

для всех f, так что $L_{X(p)}$ не зависит от выбора пары (p,φ). Из равенства $\frac{d(f(\varphi(t)))}{dt}|_{t=0} = \frac{d(f(\varphi'(t)))}{dt}|_{t=0}$, полагая $f = x^i$, находим, что $(p,\varphi) \sim (p',\varphi')$.

Таким образом, из равенства $L_{X(p)} = L_{Y(p)}$ следует, что $X_p = Y_p$. Ясно также, что отображение $X_p \to L_{X(p)}$ линейно.

Предположим теперь, что многообразие M - класса C^∞ или аналитическое. Пусть L - линейный функционал на F_U, удовлетворяющий условию $L(fg) = f(p)L(g) + g(p)L(f)$, и (U, h) - система координат, $h = (x^1,\dots, x^n)$, $h(p) = (0,\dots,0)$. Очевидно, что $L(1) = 2L(1) = 0$ (где 1 - функция, принимающая постоянное значение 1). Значит, L обращается в нуль на константах. Для любой функции $f \in F_U$ имеем

$$f \circ h^{-1}(x_1,\dots,x_n) = f(p) + \sum_i a_i x^i + \sum_{i,j} x^i x^j f_{ij}(x_1,\dots,x_n),$$

где $f_{ij}(x_1,\dots,x_n)$ - функции класса C^∞ или аналитические. Тогда $L(f) = \sum_i a_i L(x_i)$, так как $L(x^i x^j f_{ij}(x_1,\dots,x_n)) = x^i(p)L(x^j) f_{ij} \circ h(p) +$

$$+ x^j(p)L(x^i) f_{ij} \circ h(p) + x^i(p)x^j(p)L(f_{ij} \circ h(p)) = 0+0+0=0.$$

Поэтому $L(f) = \frac{df(\varphi(t))}{dt}|_{t=0}$, где $h \circ \varphi(t) = (tL(x^1), \dots, tL(x^n))$.

Значит, $L = L_{Xp}$, где X_p - вектор, которого касается пара (p,φ).

Теорема доказана.

Задача. Найти все линейные функционалы, удовлетворяющие условию $L(fg) = f(s)L(g) + g(s)L(f)$ и определенные на пространстве

а) непрерывных функций на вещественной прямой;

б) функций класса $C^k[0,1]$, где $1 \le k < \infty$.

В любом случае, независимо от класса дифференцируемости многообразия M, любой линейный функционал вида $L(f) = \frac{df(\varphi(t))}{dt}|_{t=0}$ может быть отождествлен с вектором, которого касается пара (p,φ). Так, если φ^i - кривая, определенная равенством $x^j(\varphi^i(t)) = t \cdot \delta_i^j$, то вектор, которого касается пара (p,φ^i), может быть отождествлен с линейным функционалом $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \ .$$

Из определений следует, что $\overline{h}(\partial/\partial x^i)_p = (\delta_i^1,...,\delta_i^n)$, так что векторы $(\partial/\partial x^i)_p$ образуют базис в пространстве $T_p(M)$.

Итак, каждой точке сопоставляется действительное векторное пространство $T_p\,(M)$ - касательное пространство в этой точке. Очень существенно, что это сопоставление не произвольно, а зависит от точки „дифференцируемым" образом в том смысле, что множество всех касательных векторов может быть естественным образом снабжено структурой дифференцируемого многообразия.

Касательное расслоение *TM* дифференцируемого многообразия *M* есть 2*n*-мерное дифференцируемое многообразие, множество точек которого есть объединение всех касательных векторов $\bigcup\limits_{p\in M} T_p(M)$ топология и дифференциальная структура вводятся описываемым ниже способом.

Для карты *h* на *M* с областью определения *U* построим отображение $\tilde{h}: \bigcup\limits_{p\in U} T_p(M) \to R^n \times R^n$ по формуле $\tilde{h}(X) = (x(p), X(x^1),..., X(x^n))$, где $X \in T_p(M)$; таким образом, $\tilde{h}^i(X) = x^i(p)$, $\tilde{h}^{n+i}(X) = X(x^i)$ при *i*= 1, ..., *n*. Ясно, что $\tilde{h}$ есть биективное отображение $\tilde{h}: \bigcup\limits_{p\in U} T_p(M) \to h(U)\times R^n$. Назовем $\tilde{h}$ картой расслоения *TM*, ***ассоциированной*** с картой *h*. Если h' - другая карта на *M*, с областью определения *V*, то для $(a, b) \in h'(U \cap V)\times R^n$ $(x = h(p), y = h'(p')$ имеем $\tilde{h}\circ(\tilde{h}')^{-1} = (h\circ(h')^{-1}(a), \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial x^1}{\partial y^i}|_{(h')^{-1}(a)} b^i,..., \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial x^n}{\partial y^i}|_{(h')^{-1}(a)} b^i)$.

Таким образом, $\tilde{h}\circ(\tilde{h}')^{-1}$ дифференцируемо и обратное к нему также дифференцируемо. Поэтому можно ввести в $\bigcup\limits_{p\in M} T_p(M)$ однозначно определенную топологию, для которой карты расслоения $\tilde{h}$ становятся гомеоморфизмами. По отношению к этой топологии множество всех карт расслоения $\tilde{h}$ составляет дифференцируемый атлас, задающий дифференциальную структуру на *TM*.

Определение 1. Гомеоморфизм дифференцируемого многообразия *M* в *N* называется ***диффеоморфизмом***, если *f* и f^{-1}- дифференцируемые отображения в произвольных картах.

Отметим, что для диффеоморфизма $f: M \to N$ отображение касательных пространств $(df)_*: T_pM \to T_{f(p)}N$ является изоморфизмом линейных пространств.

Естественная ***проекция*** $\pi : TM \to M$, сопоставляющая каждому касательному вектору к M его начальную точку, дифференцируема с максимальным рангом.. Касательное пространство многообразия M в точке p - $\pi^{-1}(p)$ ***слоем*** TM над p. Каждый слой является n-мерным действительным векторным пространством и дифференцируемым подмногообразием TM.

Касательное расслоение TM называется ***тривиальным***, если существует такой диффеоморфизм $f : TM \to M \times R^n$ („тривиализация"), который для любой точки изоморфно отображает слой $T_p M$ на $p \times R^n$. В общем случае TM не тривиально.

Сечением TM над подмножеством $U \subset M$ называется отображение $s : U \to TM$, обладающее свойством $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$.

Сечения $s_1, \dots, s_k$ расслоения TM называются линейно независимыми, если для каждой точки $p \in U$ векторы $s_1(p), \dots, s_k(p) \in T_p M$ линейно независимы.

Нулевое сечение $0 : M \to TM$, заданное формулой $0(p) = 0_p$ (нуль T_pM), есть дифференцируемое вложение M в TM.

Определение 2**.** ***Векторным полем*** называется дифференцируемое сечение касательного расслоения.

В некоторой карте векторное поле записывается в виде $X|_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$,

где $\alpha^i(p) = X(x^i)|_p$ - дифференцируемые функции.

Многообразие M называется ***параллелизуемым***, если существует n линейно независимых сечений TM над M, т.е. существуют такие векторные поля $X_1, \dots, X_n$ («параллелизация»), что для каждой точки $p \in M$ векторы $X_1|_p, \dots, X_n|_p$ составляют базис T_pM. Если M параллелизуемо, то на M существует векторное поле без нулевых точек. Многообразие M параллелизуемо тогда и только тогда, когда TM тривиально.

Одна из старых теорем топологии (“ежа нельзя причесать”) утверждает:

Теорема 2**.** Всякое векторное поле на четномерной сфере имеет хотя бы одну особую точку, т.е. точку в которой вектор $X_p = 0 \in T_p S^{2k}$.

Для существования векторного поля без особых точек на многообразии необходимо и достаточно, чтобы эйлерова характеристика многообразия $\chi(M) = 0$, в то время как $\chi(S^{2k}) = 2$. Иначе обстоит дело для нечетномерных сфер.

Функция $\rho(n)$, обозначающая максимальное число гладких касательных векторных полей, линейно независимых в каждой точке сферы S^{n-1}, обладает следующими свойствами:

а) $\rho(n)$ зависит только от показателя, с которым входит число 2 в разложение n на простые множители ($\rho(2k+1)=0$);

б) $\rho(16n)=\rho(n)+8$;

в) $\rho(2^k)=2^k-1$ при k=1,2,3.

Пользуясь этими свойствами, легко вычислить $\rho(n)$ для любого n. Например, на 799 – мерной сфере максимальное число векторных полей независимых в каждой точке равно $\rho(800)=\rho(32\cdot 25)=\rho(32)=\rho(2)+8=9$.

Обычный метод доказательства нетривиальности касательного расслоения состоит в том, что каждому расслоению ставятся в соответствие алгебраические инварианты («характеристические классы когомологий»), обращающиеся в нуль для тривиальных расслоений, а затем доказывают, что в рассматриваемом случае эти инварианты отличны от нуля. Таким методом были открыты топологические сферы, имеющие разные дифференциальные структуры. Однако, приведенная только что формула для подсчета максимального числа линейно независимых в каждой точке на сфере векторных полей требует гораздо более глубоких средств.

2.1.4. Векторные поля и производные Ли

В этом пункте мы покажем, что векторные поля можно рассматривать как «инфинитезимальные преобразования», и изучим их свойства.

Определение 1. Семейство $F : R \times M \to M$ диффеоморфизмов называется ***однопараметпрической группой дифференцируемых преобразований многообразия*** M,(***гладкой динамической системой*** на M, ***потоком*** на M), если отображение $F : R \times M \to M$, переводящее (t, p) в $F(t, p)$, есть дифференцируемое действие аддитивной группы вещественных чисел на М, т.е. если

1) отображение $F\,(t, p)$ дифференцируемо;
2) $F(t+s,\cdot) = F(t, F(s,\cdot))$ для всех t и s;
3) $F(0,p)$ есть тождественный диффеоморфизм.

Однопараметрическая группа $F(t,\cdot)$ индуцирует векторное поле на M. Действительно, для любой точки $p \in M$ отображение $t \to F(t, p)$ является гладкой кривой, проходящей через p. Определим X_p, как касательный вектор этой кривой. Пусть $x^1,\ldots, x^n$ - координатные функции локальной системы координат. Тогда

$$X_p = \sum \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(x^i(F(t, p)) - x^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Поскольку отображение $F\,(t, p)$ дифференцируемо, отображение $p \to X_p$ - определяет векторное поле X на M. Векторное поле X называется *инфинитезимальной образующей однопараметрической группы* $F(t, p)$.

Обратное утверждение не вполне верно. Не всякое векторное поле на M порождает однопараметрическое семейство преобразований многообразия M. Однако, локально это так. Более точно, имеет место

Теорема. Пусть X - векторное поле на M. Для любого $p \in M$ существуют окрестность U, $p \in U$, $\varepsilon > 0$ и единственное семейство дифференцируемых отображений $F : R \times U \to M$, определенное при $-\varepsilon < t < \varepsilon$ такое что

1) отображение $F : (-\varepsilon,\varepsilon) \times U \to M$, переводящее (t, p) в $F\,(t, p)$, дифференцируемо;
2) если $F(t,q) \in U$, $|t|$, $|s|$, $|t+s|$ все меньше ε и $q \in U$, $F(s,q) \in U$, то $F(t+s,q) = F(s, F(t,q))$;
3) X_q есть касательный вектор кривой (q, F_q) для $q \in U$, где F_q кривая $t \to F(t,q)$.

Доказательство. Пусть (V, h) - карта вблизи точки p. Тогда в окрестности V мы можем написать $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dF^{(i)}}{dt} = X^i(F^{(1)},...,F^{(n)}) \text{ , } i=1,\dots,n.$$

По теореме существования решений для обыкновенных дифференциальных уравнений существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, что система дифференциальных уравнений имеет единственное решение $F^{(i)}(t, x^1,...,x^n)$, определенное при $|t| < \varepsilon_1$ и удовлетворяющее условию $F^{(i)}(t; x^1,...,x^n) = x^i$, где $(x^1,...,x^n) \in B^n(\delta_1)$.

Если мы выберем достаточно малые $\varepsilon \le \varepsilon_1$ и $\delta \le \delta_1$, то $F^{(i)}(t; x^1,...,x^n) \in h(V)$ для $|t| < \varepsilon$, $(x^1,...,x^n) \in B^n(\delta)$.

Пусть $U = h^{-1}(B^n(\delta))$. Отображение $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, определенное в локальных координатах формулой $(F)^{(i)}(t; x^1,...,x^n)$, является, очевидно, дифференцируемым отображением $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$. Далее, функции $\Psi^{(i)}(t; x^1,...,x^n) = (F)^{(i)}(s + t; x^1,...,x^n)$ образуют решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям

$$\Psi^{(i)}(0; x^1,...,x^n) = (F)^{(i)}(s; x^1,...,x^n).$$

В силу единственности имеем

$$(F)^{(i)}(s + t; x^1,...,x^n) = (F)^{(i)}(t; (F)^{(1)}(s; x^1,...,x^n),...,(F)^{(n)}(s; x^1,...,x^n)).$$

Таким образом, условие 2) теоремы выполнено. Условие 3) выполнено по построению.

Мы не можем определить F (t, p) для всех t и на всем M, поскольку теорема существования решений дифференциальных уравнений гарантирует существование только локального решения. Даже в евклидовом пространстве есть примеры векторных полей, не порождающих однопараметрическую группу во всем пространстве. Однако, нетрудно показать, что любое векторное поле на компактном многообразии порождает однопараметрическую группу. Теорию динамических систем в метрическом пространстве мы рассмотрим в главе 6, приведенная теорема обосновывает сделанные там предположения.

Векторные поля кроме обычных операций линейного пространства (сложения и умножения на число) допускают еще одну важную операцию – коммутирование.

Произведение (или ***скобка***) Ли на векторном R-пространстве E есть отображение $[,]: E \times E \to E$, обладающее следующими свойствами:

1) $[\alpha X + \beta \tilde{X}, Y] = \alpha[X, Y] + \beta[\tilde{X}, Y]$,

2) $[X, \alpha Y + \beta \tilde{Y}] = \alpha[X, Y] + \beta[X, \tilde{Y}]$,

3) $[X, Y] = - [Y, X]$,

4) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]] = 0$,

где $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}, Z \in E$ и $\alpha, \beta \in R$. Согласно (1) и (2), отображение [,] линейно, а согласно (3) - антикоммутативно, причем (2), очевидно, вытекает из (1) и (3). Циклическое соотношение (4) называется тождеством Якоби. Объект, состоящий из векторного пространства и заданного на нем произведения Ли, называется действительной *алгеброй Ли*. Например, векторное произведение на R^3 есть произведение Ли, превращающее R^3 в алгебру Ли.

Пусть M - дифференцируемое многообразие класса C^∞ или аналитическое, а U—открытое подмножество M. Зафиксировав точку $p \in U$, определим для векторных полей $X, Y \in TU$ отображение $X_p Y : F(U) \to R$ по формуле $(X_pY)(f) = X_p(Yf)$. Легко проверить, что X_pY-Y_pX есть касательный вектор к M в точке p, хотя X_pY, вообще говоря, не является касательным вектором. Построим по заданным $X, Y \in TU$ векторное поле $[X, Y] \in TU$, полагая

$$[X, Y]_p = X_pY - Y_pX.$$

Приведенное определение превращает, как легко видеть, векторное R-пространство в действительную алгебру Ли. Записывая для краткости $X(Yf)$ в виде XYf, $f \in F(U)$, имеем $[X, Y] = XYf - YXf$.

Докажем следующие соотношения:

$$[X, \varphi Y] = \varphi[X, Y] + (X\varphi)Y, \qquad (*)$$

$$[\varphi X, Y] = \varphi[X, Y] - (Y\varphi)X. \qquad (**)$$

В самом деле,

$$[X, \varphi Y]f = X(\varphi Yf) - \varphi Y(Xf) =$$

$$= (X\varphi)Yf + \varphi X(Yf) - \varphi Y(Xf) = (X\varphi)Yf + [X, Y]f,$$

где $f \in F(U)$; (**) следует из (*) ввиду антисимметричности произведения Ли.

Пусть x - карта с областью определения U. Рассмотрим базисные векторные поля $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, i=1,…,n. Из перестановочности частных производных в R^n следует$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

Для векторных полей $X, Y \in TU$ получаем представления $X = \sum \alpha^i X_i$ и $Y = \sum \beta^i X_i$ с дифференцируемыми функциями $\alpha^i = Xx^i$ и $\beta^i = Yx^i$. В силу (*) и (**) отсюда вытекает локальное представление

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^{n} (X\beta^i - Y\alpha^i) X_i = \sum_{i,j=1}^{n} (\alpha^j \frac{\partial \beta^i}{\partial x^j} - \beta^j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^j}) X_i .$$

Пусть U - открытое подмножество n-мерного дифференцируемого многообразия M, $X, Y \in TU$. Если [X, Y] = 0, то говорят, что векторные поля X, Y коммутируют на U, так как в этом случае операторы XY, YX совпадают. Равенство [X, Y] = 0 является условием интегрируемости. Векторные поля X и Y коммутируют на U тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in U$ существует окрестность $V \subset U$, где локальные потоки F^t, Ψ^s векторных полей X, Y коммутируют для достаточно малых интервалов времени, т.е. [X, Y] = 0 равносильно $F^t \circ \Psi^s = \Psi^s \circ F^t$. Геометрически это значит, что мы приходим в одну и ту же точку, двигаясь из точки $q_1 \in V$ по каждому из следующих двух путей: (a) сначала вдоль „линии тока" (интегральной кривой) X в течение времени t до q_3 , затем по проходящему через q_3 интегральному пути Y в течение времени s; (b) сначала вдоль интегрального пути Y в течение времени s до q_2, затем по проходящему через q_2 интегральному пути X в течение времени t. На этом простом обстоятельстве основана принадлежащая Фробениусу теория инволютивных распределений, в которой задают в каждой точке $p \in M$ k-мерное линейное подпространство касательного пространства T_pM ($k<n$) и ищут интегральные многообразия, т.е. k-мерные дифференцируемые подмногообразия M, касательные пространства которых во всех точках совпадают с заданными подпространствами. Если потоки $F(t,\cdot), \Psi(s,\cdot)$ коммутируют, можно построить с помощью формулы $H(t,s)(x) = F(t, \Psi(s,x))$ такое отображение окрестности $0 \in R^2$ в M, для которого коммутирующие векторные поля локально являются образами стандартных полей евклидового пространства при дифференцируемых отображениях. Обратное также верно .

Пусть $X_1,\ldots, X_n$ - дифференцируемые векторные поля на U, произведения Ли которых попарно равны нулю, причем $X_1|_p,..., X_n|_p$ линейно независимы, тогда в некоторой окрестности p существует карта, базисными векторными полями которой являются $X_1,\ldots, X_n$. Тем самым мы получили геометрическую характеристику обращения в нуль произведения Ли $[X, Y]$.
Само же произведение $[X, Y]$ можно истолковать как „производную Ли" L_XY векторного поля Y относительно X, а именно, чтобы вычислить $[X, Y]$ в точке $p \in U$, надо найти предел разностного отношения в T_pM, причем для сравнения векторов, лежащих в разных касательных пространствах, их переносят в p с помощью локального потока $F(t,\cdot)$ векторного поля X, т.е.

$$[X,Y]|_p = L_X Y|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y_p - F_*(t, Y\circ F^{-t}(p))).$$

§ 2. Теорема Фробениуса

Векторное поле X на многообразии M определяет, по крайней мере, локально, некоторый поток, т.е. однопараметрическую группу преобразований. Если мы заменим X на fX, где f - дифференцируемая функция, то новый поток будет иметь те же траектории, что и старый; изменится только его «скорость» вдоль каждой траектории. Таким образом, траектория определяется скорее полем «прямых», чем полем векторов. Мы можем рассмотреть более общий объект - поле «k-мерных подпространств».

Отметим, что группа $GL(n)$ действует слева на многообразии $G(k, E^n)$, где $G(k,E^n)$ - множество всех k-мерных подпространств из E^n (см. пример 6 п.2.1.2.). Аналогично конструкции касательного расслоения возможно сконструировать расслоенное пространство над M - $G^k(M)$, слоями которого над точкой $x \in M$ являются многообразия $G(k, T_x(M))$.
Обозначим многообразие величин типа $G(k, E^n)$ над M через $G^k(M)$. Отождествим $G^k(M)$ с множеством всех k -мерных подпространств векторных пространств $T_x(M)$, $x \in M$.

Дифференциальной системой размерности k называется дифференцируемое сечение расслоения $G^k(M)$.

Определение 1. Пусть D - дифференциальная система размерности k на M. Подмногообразие $N \subset M$ называется ***интегральным многообразием системы*** D, если $\mathrm{i}_*(T_x(N) \subset D[\mathrm{i}(x)]$ для всех $x \in N$, где i - вложение $N \to M$.

Заметим, что $D[\mathrm{i}\,(x)]$ есть подпространство в $T_{\mathrm{i}(x)}(M)$, так же $\mathrm{i}_*(T_x(N))$, поэтому приведенное определение имеет смысл. Следовательно, интегральное многообразие не более чем k-мерно.

Определение 2. Дифференциальная система D размерности k называется ***вполне интегрируемой***, если в окрестности каждой точки $x \in M$ существует такая карта (U, h), $h = (x^1, \dots, x^n)$, что все подмногообразия из U, задаваемые уравнениями $x^{k+1} = \text{const}$, $x^{k+2} = \text{const}, \dots, x^n = \text{const}$ являются интегральными многообразиями системы D.

Цель настоящего параграфа - сформулировать критерий полной интегрируемости дифференциальной системы. Прежде чем это сделать, приведем один из способов задания дифференциальной системы. Если $X_1,\dots, X_k$ - набор k векторных полей, линейно независимых в каждой точке $x\in M$, то, как легко проверить, отображение

$$x \to \{a_1(X_1)_x + ... + a_k(X_k)_x : a_1,...,a_k \in R\}$$

является дифференциальной системой.

Определение 3. Пусть D - дифференциальная система. Через $V(D)$ мы обозначим множество всех таких векторных полей X, что $X(y) \in D(y)$ для всех $y \in M$. Если $X \in V(D)$, то будем говорить, что *поле X принадлежит системеD.*

Для любого линейного пространства L векторных полей мы можем рассмотреть подпространство $D\,(y) = \{X\,(y)\colon X \in L\}$ при каждом $y \in M$.

Если $\dim D(y)=$ const, то мы получим дифференциальную систему D, причем $L \subset V(D)$. Любая система D получается из пространства $L = V(D)$ подобным образом. Поэтому мы можем выразить наши условия полной интегрируемости в терминах пространства $V(D)$. Предположим, что D есть k-мерная система, а $X_1,..., X_k$ - векторные поля, определенные на открытом множестве U. Мы скажем, что поля X_i порождают $V(D)$ на U, если $X_i \in V(D)$ и любое поле $X \in V(D)$ представимо на U в виде $X = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i X_i$, где f_i - дифференцируемые функции.

Теорема (Фробениуса). Пусть D - дифференциальная система размерности k на n-мерном многообразии M. Система D вполне интегрируема тогда и только тогда, когда $V(D)$ есть алгебра Ли, т.е. $[X,Y] \in V(D)$, если $X \in V(D)$ и

$Y \in V(D)$. Так, если $X_1,\dots, X_k$ порождают $V(D)$ на U, то система вполне интегрируема тогда и только тогда, когда существуют такие функции C^i_{jm} на U, что

$$[X_j, X_m] = \sum_{i=1}^{k} C^i_{jm} X_i. \qquad (*)$$

Доказательство. Необходимость почти очевидна. Действительно, заметим сначала, что функции C^i_{jm} определены однозначно, поскольку поля X_i линейно независимы в каждой точке. Поэтому достаточно доказать их существование в окрестности каждой точки из U. Если система D вполне интегрируема, то любая точка x покрывается картой, описанной в определении 2, и в терминах этой карты система D порождается на всем U полями $\partial/\partial x^1,\dots,\partial/\partial x^k$. Поэтому мы можем найти такие функции a_{im} и b_{il}, что $\sum_{m=1}^{k} a_{im}\frac{\partial}{\partial x_m}$ и $\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^{k} b_{il} X_l$.

Тогда $$[X_i, X_j] = [\sum_l a_{jl}\frac{\partial}{\partial x^l}, \sum_m a_{jm}\frac{\partial}{\partial x^m}] =$$

$$= \sum_{h,m}\left(\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_m} a_{jm} - \frac{\partial a_{jh}}{\partial x_m} a_{im}\right)\frac{\partial}{\partial x^h} = \sum_{h,l,m} b_{hl}\left(\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_m} a_{jm} - \frac{\partial a_{jh}}{\partial x_m} a_{im}\right) X_l,$$

что доказывает существование функций C^i_{jm}.

При доказательстве достаточности мы снова можем ограничиться локальным рассмотрением. Для $k= 1$ теорема сводится к теореме существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, для данного векторного поля X, согласно этой теореме существования, мы всегда можем ввести локальные координаты $y^1,\dots, y^n$, в которых поле X имеет вид $\partial/\partial y^1$. Мы докажем теорему индукцией по k. Пусть $x \in M$ и $X_1,\dots, X_k$ - векторные поля, определенные в некоторой окрестности $U, x \in U$, удовлетворяющие условию (*) и порождающие $V(D)$. Введем координаты $y^1,\dots, y^n$, в которых $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$ и $y^1(x)= 0$. Положим $f_i = X_i y^1$ и $Y_1=X_1$, $Y_i=X_i - f_i X_1$, $i=2,\dots,k$.

Векторные поля Y_i линейно независимы и, значит, порождают $V(D)$. Кроме того, $Y_i y^1=0$ для $i>1$.

Рассмотрим подмногообразие $W \subset U$, определяемое уравнением $y^1=0$. Векторные поля Y_i касательны к W, т.е. $Y_j(z) = i_*(Z_j(z))$ для всех $z \in W$, где Z_j ($j = 2,\dots,k$) - некоторые векторные поля на W. Действительно, пусть $z^2,\dots, z^n$ - координаты на W, определенные формулой $z^j = y^j|W$. Тогда

$i_*((\partial/\partial z^j)(z)) = (\partial/\partial y^j)(z)$ и, если $Y_j = \sum_{s=2}^{n} Y_j^s \partial/\partial y^s$, то поля Z_j определяются формулой $Z_j = \sum_{s=2}^{n} Z_j^s \partial/\partial z^s$, где Z_j^s - ограничение функции Y_j^s на W.

Векторные поля Z_j удовлетворяют условию (*) (где k заменено на k - 1). Действительно, если бы вектор $[Z_i, Z_j]$ (z) не лежал в пространстве, порожденном векторами Z_2 (z),…, Z_k (z), то вектор $[Y_i, Y_j]$ (z) не лежал бы в пространстве, порожденном Y_j (z) (j = 2,…, n), поскольку у всех векторов Y_j (j = 2,..., n) коэффициент при $\partial/\partial y^1$ равен нулю. Таким образом, по предположению индукции мы можем найти такие координаты w^2,…, w^n в некоторой окрестности точки x на W, что многообразия w^{k+1} = const,…, w^n = const являются интегральными многообразиями дифференциальной системы, порожденной полями Z_2, ..., Z_k. Определим теперь координаты x^1,…, x^n вблизи x, полагая $x^1 = y^1$, $x^j(y^1,\dots, y^n) = w^j(y^2,\dots, y^n)$. Якобиан x по y отличен от нуля в точке x, поэтому x^i действительно образуют систему координат вблизи x. Кроме того, поскольку $\partial x^j/\partial y^1 = 0$, для $j > 1$, мы имеем $Y_1 = \partial/\partial y^1 = \partial/\partial x^1$. Далее, $Y_1 x^{k+r}=0$,

так что $$\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i x^{k+r}) = Y_1(Y_i x^{k+r}) = Y_1(Y_i x^{k+r}) - Y_i(Y_1 x^{k+r}) = -[Y_i, Y_1] x^{k+r}.$$

Но поля Yi удовлетворяют условию (*), т.е. существуют такие функции C_{jm}^i,

что $$[Y_i, Y_1] = C_{i1}^1 Y_1 + \sum_{j=2}^{k} C_{i1}^j Y_j.$$

Учитывая $Y_1 x^{k+r}=0$, получаем $$\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i x^{k+r}) = \sum_{j=2}^{k} C_{i1}^j (Y_j x^{k+r}), \qquad i = 2, \dots, k.$$

При фиксированном r мы можем рассматривать полученную систему как однородную линейную систему k - 1 дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $Y_i\, x^{k+r}$ от независимой переменной x^1. При x^1 = 0 мы имеем $Y_i\, x^{k+r} = Z_i w^{k+r} = 0$, т.е. система имеет нулевые начальные данные и, значит, в силу теоремы единственности функции $Y_t x^{k+r}$ тождественно равны нулю. Поэтому векторные поля $Y_1,\dots,Y_k$ выражаются через $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k$. Таким образом, $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k$ порождают $V(D)$, т.е. система D вполне интегрируема.

Задача . Пусть X_1 ,…,X_k - всюду линейно независимые на M векторные поля. Показать, что если $[X_i, X_j]$ =0, то в окрестности каждой точки $x \in M$ существует локальная система координат x^1,…,x^n, в которой $X_i = \partial / \partial x^i$ (i = 1,…,k).

Теорема Фробениуса одна из основных теорем дифферециального исчисления. Однако, чаще ее используют в случае, когда дифференциальная система задается не векторными полями, а дифференциальными формами.

§ 3. Теорема Сарда

В общем случае множество критических значений достаточно гладкой функции может не быть конечным. Однако, это множество имеет нулевую меру Лебега. Так как множество меры нуль не может содержать внутри себя непустое открытое множество, то $R^p \setminus f(C)$ должно быть всюду плотно в $R^p \setminus f(C)$.

Для доказательства существенно наличие у отображения большого количества производных. Минимальный класс гладкости для $f \in C^k(R^n, R^p)$, где $k = \max(n-p, 0)+1$.

Более обще, рассмотрим гладкое отображение $f : N \to M$ дифференцируемого многообразия N размерности n в многообразие размерности p. Точка $x \in N$ называется критической, если $\mathrm{rang}(df_x) < p$, где $df_x : TN_x \to TM_{f(x)}$.

Для множества всех критических точек C множество $f(C)$ - множество критических значений, множество $M \setminus f(C)$ - множество регулярных значений. В случае многообразия M со счетной базой множество регулярных значений всюду плотно. Одно из применений теоремы Сарда использует следующее утверждение.

Теорема. Пусть $f : N \to M$ гладкое отображение дифференцируемого многообразия размерности n в дифференцируемое многообразие размерности p, а $y \in M$ - регулярное значение отображения f, то множество $f^{-1}(y) \subset N$ - дифференцируемое многообразие размерности p-n.

Задача. Доказать это утверждение.

2.3.1. Доказательство теоремы Сарда

Теорема Сарда. Пусть $f : U \to R^p$ - гладкое отображение, $f \in C^\infty(U)$, причем множество U открыто в R^n, и пусть C — множество его критических точек, т.е. множество всех тех $x \in U$, для которых, $\mathrm{rang}(df_x) < p$. Тогда $f(C) \subset R^p$ имеет меру нуль.

Замечание. Случай $n \le p$ сравнительно прост, однако мы дадим универсальное доказательство, в котором этот случай выглядит столь же плохим, как и остальные.

Доказательство будет вестись индукцией по *n*. Заметим, что утверждение имеет смысл при $n \ge 0$ и $p > 1$ (По определению R^0 состоит из одной точки.). Начнем индукцию: теорема, несомненно, верна при *n*=0.

Пусть $C_1 \subset C$ означает множество всех таких $x \in U$, для которых первый дифференциал df_x равен нулю. Пусть C_i означает множество таких $x \in U$, что все частные производные функции *f* порядка меньше *i* обращаются в точке *x* в нуль. Таким образом, мы имеем убывающую последовательность замкнутых множеств $C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$.

Доказательство будет разбито на три шага.

1-й шаг. Образ $f(C \backslash C_1)$ имеет меру нуль.

2-й шаг. Образ $f(C_i \backslash C_{i+1})$ имеет меру нуль при $i \ge 1$.

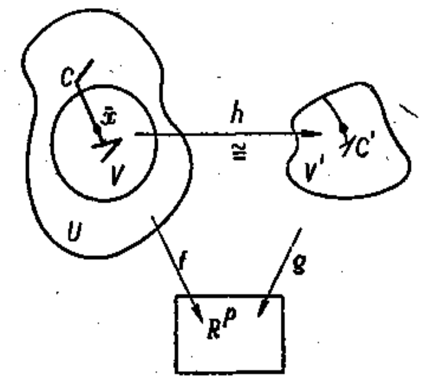
3-й шаг. Образ $f(C_k)$ имеет меру нуль для достаточно большого *k.*

Доказательство. 1-й шаг. Этот первый шаг, по-видимому, самый трудный. Мы можем считать, что $p \ge 2$, так как $C = C_1$ при $p = 1$.

Нам понадобится хорошо известная теорема Фубини, которая утверждает, что *измеримое множество* $A \subset R^p = R^1 \times R^{p-1}$ *должно иметь меру нуль, если оно пересекается с каждой гиперплоскостью* $(\text{const}) \times R^{p-1}$ *по множеству* (p-1) - *мерной меры нуль.*

Для каждого $\bar{x} \in C \setminus C_1$ мы ниже найдем такую открытую окрестность $V \subset R^n$, что $f(V \cap C)$ имеет меру нуль. А так как $C \backslash C_1$ покрывается счетным числом таких окрестностей, то отсюда непосредственно будет следовать, что мера $f(C \backslash C_1)$- равна нулю.

Так как $\bar{x} \notin C_1$, то существует некоторая частная производная, например $\partial f_1 / \partial x_1$, которая отлична от нуля в точке $\bar{x}$. Следовательно, множество критических значений для *g* совпадает с $f(V \cap C)$.



Построение отображения g

Рассмотрим отображение $h : U \to R^n$, определенное формулой $h(x) = (f_1(x), x_2, ..., x_n)$. Так как якобиан $dh_{\bar{x}}$ невырожден, то h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x на открытое множество V'. Композиция $g = f \circ h^{-1}$ будет отображать V' в R^p. Заметим, что множество C критических точек отображения g есть в точности $h(V \cap C)$; следовательно, множество критических значений для g совпадает с $f(V \cap C)$.

Заметим, что для каждой точки $(z, x_2, ..., x_n) \in V'$ точка $g(z, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит гиперплоскости $z \times R^{p-1} \subset R^p$, т.е. g переводит гиперплоскости в гиперплоскости. Пусть $g_z : (z \times R^{n-1}) \cap V' \to z \times R^{p-1}$ обозначает ограничение отображения g на область в гиперплоскости $z \times R^{n-1}$. Заметим, что точка гиперплоскости $z \times R^{n-1}$ является критической для g_z тогда и только тогда, когда она критическая точка для g, так как матрица частных производных отображения g представляется в виде

$$(\partial g_i / \partial x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \dfrac{\partial (g_z)_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с предположением индукции, множество критических значений для g_z имеет меру нуль в $z \times R^{p-1}$. Поэтому множество критических значений для g пересекается с каждой гиперплоскостью по множеству - меры нуль. Это множество $g(C')$ измеримо, так как оно может быть представлено в виде счетного объединения компактных подмножеств. Значит, по теореме Фубини, множество $g(C') = f(V \cap C)$ имеет меру нуль, и первый шаг завершен.

2-й шаг. Для каждого $\bar{x} \in C_k \setminus C_{k+1}$ существует $(k+1)$ - я производная $\partial^{k+1} f_r / \partial x_{s_1} ... \partial x_{s_{k+1}}$ $(s_1 + ... + s_{k+1} = k+1)$, отличная от нуля в точке $\bar{x}$. Стало быть, функция $w(x) = \partial^k f_r / \partial x_{s_2} ... \partial x_{s_{k+1}}$ обращается в точке $\bar{x}$ в нуль, но $\partial w / \partial x_{s_1}$ не равна нулю. Предположим, для определенности, что $s_1 = 1$. Тогда отображение $h : U \to R^n$, определенное по формуле $h(x) = (w(x), x_2, ..., x_n)$, диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки $\bar{x}$ на открытое множество V'. Заметим, что h переводит $C_k \cap V$ в гиперплоскость $0 \times R^{n-1}$. Опять рассмотрим $g = f \circ h^{-1} : V' \to R^p$.

Пусть $\tilde{g} : (0 \times R^{n-1}) \cap V' \to R^p$ обозначает ограничение отображения g. По предположению индукции множество критических значений $\tilde{g}$ имеет меру нуль в R^p. Но все точки множества $h(C_k \cap V)$ заведомо являются критическими точками для $\tilde{g}$, так как в них все производные, порядка меньшего или равного k, равны нулю. Поэтому множество $\tilde{g}(h(C_k \cap V)) = f(C_k \cap V)$ имеет меру нуль. Из того, что $C_k \backslash C_{k+1}$ покрывается счётным числом таких окрестностей V, следует, что $f(C_k \backslash C_{k+1})$ имеет нулевую меру.

3-й шаг. Пусть $I^n \subset U$ - куб с ребром a.

Если k достаточно велико (точнее, $k>n/p—1$), то мы докажем, что $f(C_k \cap I^n)$ имеет меру нуль. Так как C_k может быть покрыто счетным числом таких кубиков, то отсюда будет следовать, что множество $f(C_k)$ имеет меру нуль. Используя теорему Тейлора, компактность куба 1^n и определение C_k мы можем написать $f(x + h) = f(x) + R(x,h)$, где $\|R(x,h)\| \le c\|h\|^{k+1}$ при $x \in C_k$, $x + h \in I^n$. Здесь c - постоянная, зависящая только от f и I^n. Теперь разделим I^n на r^n кубиков с ребром a/r. Пусть I_1 - кубик получившегося разбиения, который содержит точку $x \in C_k$. Тогда любая точка I_1 может быть записана в виде $x + h$, где $\|h\| \le \sqrt{n}(a/r)$.

Из неравенства $\|R(x,h)\| \le c\|h\|^{k+1}$ следует, что $f(I_1)$ лежит в кубе с ребром b/r^{k+1} с центром в точке $f(x)$, где $b = 2c(\sqrt{n} \cdot a)^{k+1}$.

Следовательно, $f(C_k \cap I^n)$ содержится в объединении самое большее r^n кубиков, имеющих общий объем $V \le r^n(b/r^{k+1})^p = b^p r^{n-(k+1)p}$.

Если $k + 1 > n/p$, то очевидно, что V стремится к 0 при $r \to \infty$. Поэтому множество $f(C_k \cap I^n)$ должно иметь меру нуль. Доказательство теоремы Сарда закончено.

Теорема Сарда – одна из основных теорем дифференциального исчисления.

С ее помощью доказываются теорема Уитни о погружении, теорема о существовании функции на многообразии, все критические точки, которой не вырождены, и даже задача Лаврентьева – Белинского о локальной однолистности достаточно гладких отображений с ограниченным искажением. Приложение к теореме Брауэра о неподвижной точке рассмотрим в следующем пункте.

2.3.2. Теорема Брауэра о неподвижной точке

Мы сейчас используем теорему Сарда для доказательства классической теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Лемма 1. Пусть M - компактное многообразие с краем. Тогда не существует гладкого отображения $f: M \to \partial M$, которое оставляло бы каждую точку края на месте .

Доказательство (Хирш). Предположим, что такое отображение f существует. Пусть $y \in \partial M$ - регулярное значение отображения f. Так как y, конечно, является регулярным значением для тождественного отображения $f \mid \partial M$, то $f^{-1}(y)$ - гладкое одномерное многообразие с краем, состоящим из одной точки: $f^{-1}(y) \cap \partial M = \{y\}$. Многообразие $f^{-1}(y)$ бикомпактно, а так как бикомпактными одномерными многообразиями являются только конечные объединения непересекающихся кривых, диффеоморфных окружностям или дугам, то край $\partial f^{-1}(y)$ должен состоять из четного числа точек. Это противоречие доказывает лемму.

Задача. Доказать, что всякое компактное одномерное многообразие диффеоморфно конечному числу окружностей или дуг.

В частности, единичный шар $B^n(1) = \{x \in R^n : (x,x) \le 1\}$ является компактным многообразием, краем которого служит сфера S^{n-1}. Следовательно, как частный случай мы доказали, что *тождественное отображения сферы* S^{n-1} *нельзя продолжить до гладкого отображения* $B^n(1)$ в S^{n-1}.

Лемма 2. Для любого гладкого отображения $g: B^n(1) \to B^n(1)$ существует неподвижная точка (т.е. точка $x \in B^n(1)$, для которой $g(x) = x$).

Доказательство. Предположим, что g не имеет неподвижной точки. Для $x \in B^n(1)$ определим $f(x) \in S^{n-1}$ как точку сферы S^{n-1}, лежащую на соединяющей x с $g(x)$ прямой и более близкую к x, нежели к $g(x)$. Тогда $f: B^n(1) \to S^{n-1}$ - гладкое отображение и $f(x)= x$ при $x \in S^{n-1}$, что противоречит лемме 2. (В гладкости f можно убедиться, получив f путем непосредственного построения, положив, что $f(x) = x+tu$, где $u = \dfrac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|}$,

$t = -(x,u) + \sqrt{1-(x,x)+[(x,u)]^2}$, причем выражение под знаком радикала, всегда положительно. Здесь и далее $\|x\|$ - евклидова длина, (x,x) - скалярное произведение.

Теорема (Брауэра о неподвижной точке). Любое непрерывное отображение $G: B^n(1) \to B^n(1)$ имеет неподвижную точку.

Доказательство. Мы сведем эту теорему к лемме 2, аппроксимируя G гладким отображением. Согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса или замечанию * в п.1.1.2, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое бесконечно дифференцируемое отображение $P_1 : R^n \to R^n$, что $\|P_1(x) - G(x)\| < \varepsilon$ при $x \in B^n(1)$. Однако P_1 может переводить точки $x \in B^n(1)$ в точки, находящиеся вне $B^n(1)$. Этого можно избежать, положив $P(x) = P_1(x)/(1+\varepsilon)$.

Ясно, что P отображает $B^n(1)$ в $B^n(1)$ и $\|P(x) - G(x)\| < 2\varepsilon$ при $x \in B^n(1)$. Предположим, что $G(x) \neq x$ для всех $x \in B^n(1)$. Тогда непрерывная функция $\|G(x) - x\|$ должна иметь на $B^n(1)$ минимум $\mu > 0$. Выберем, как показано выше, такое бесконечно дифференцируемое отображение $P: B^n(1) \to B^n(1)$, что $\|P(x) - G(x)\| < \mu$ при всех $x \in B^n(1)$. Тогда P - гладкое отображение шара $B^n(1)$ в себя, не имеющее неподвижных точек. Это противоречит лемме 2, чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема Брауэра имеет существенное обобщение.

Теорема (Шаудера-Тихонова) Пусть X - хаусдорфово, локально выпуклое пространство и K - непустое выпуклое бикомпактное множество в X. Всякое непрерывное отображение $f: K \to K$ множества K в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Теорема Шаудера –Тихонова одна из наиболее мощных теорем существования. Теорема Пеано и вопросы связанные с разрешимостью нелинейных дифференциальных уравнений из нее следуют. Предположение о бикомпактности K существенно.

Задача. Привести пример непрерывного отображения единичного шара в банаховом пространстве в себя, не имеющего неподвижной точки.

Г Л А В А 3

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Автономные системы

3.1.1. Резольвента и её свойства

Пусть область определения $D(A)$ и область значений $R(A)$ линейного оператора A лежат в одном и том же комплексном линейном топологическом пространстве X. Рассмотрим линейный оператор

$$A_\lambda = \lambda I - A,$$

где λ- произвольное комплексное число, а I - тождественный оператор. Исследование множества тех значений λ, при которых оператор A_λ не имеет обратного оператора, и изучение свойств оператора, обратного к A_λ в тех случаях, когда он существует, составляют содержание так называемой *спектральной теории операторов.*

Определение. Если при $\lambda = \lambda_0$ область значений $R(A_{\lambda_0})$ плотна в пространстве X и оператор A_{λ_0} обладает непрерывным обратным оператором $(\lambda_0 I - A)^{-1}$, то говорят, что комплексное число λ_0 принадлежит ***резольвентному множеству*** $\rho(A)$ оператора A. Оператор $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ обозначим через $R(\lambda_0, A)$ и назовем ***резольвентой*** оператора A в точке $\lambda = \lambda_0$. Совокупность всех комплексных чисел λ, не принадлежащих резольвентному множеству $\rho(A)$, называется *спектром* оператора A. Это множество мы обозначим через $\sigma(A)$. Спектр $\sigma(A)$ можно разбить на три попарно непересекающихся множества $P_\sigma(A)$, $C_\sigma(A)$ и $R_\sigma(A)$, определяемых следующими условиями:

$P_\sigma(A)$ - множество комплексных чисел λ, при которых оператор A_λ не имеет обратного; $P_\sigma(A)$ называется *точечным спектром* оператора A.

$C_\sigma(A)$ - множество комплексных чисел λ, при которых оператор A_λ обладает обратным оператором с плотной в X областью определения, но оператор A_λ^{-1} не является непрерывным; $C_\sigma(A)$ называется *непрерывным спектром* оператора A.

$R_\sigma(A)$ - множество комплексных чисел λ, при которых оператор A_λ имеет обратный оператор, область определения которого не является плотной в *X*, $R_\sigma(A)$ называется *остаточным спектром* оператора *A*.

Предложение. Для того чтобы $\lambda \in P_\sigma(A)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $Ax = \lambda_0 x$ имело ненулевое решение $x \neq 0$. В этом случае число λ_0 называется *собственным значением* оператора *A*, а решение *x* - *собственным вектором* оператора *A*, соответствующим собственному значению λ_0. Нуль-подпространство $N\ (\lambda_0 I - A)$ оператора *A* называется *собственным подпространством* оператора *A*, соответствующим собственному значению λ_0. Оно состоит из вектора *x*=0 и всех собственных векторов, соответствующих λ_0. Размерность собственного подпространства, соответствующего λ_0, называется *кратностью* собственного значения λ_0.

Определение. Линейный оператор $A: X \to Y$ называется замкнутым, если его график, т.е. множество пар вида $\{\{x, Ax\}: x \in D(A)\}$,образует замкнутое подпространство пространства $X \times Y$.

Теорема 1. Пусть *X* - комплексное *B*-пространство и *A* - замкнутый линейный оператор, область определения и область значений которого принадлежат *X*. Тогда при любом $\lambda_0 \in \rho(A)$ резольвента $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ представляет собой непрерывный линейный оператор, определенный во всем пространстве *X*.

Доказательство. Поскольку $\lambda_0 \in \rho(A)$ принадлежит резольвентному множеству, множество $R(\lambda_0 I - A) = D(\lambda_0 I - A)^{-1}$ плотно в *X*, причем существует такая положительная постоянная *c*, что $\|(\lambda_0 I - A)x\| \geq c\|x\|$ при всех $x \in D(A)$.

Мы должны показать, что $R(\lambda_0 I - A) = X$. Предположим, что для некоторой последовательности $\{x_n\} \subseteq X$ существует предел $s - \lim_{n\to\infty}(\lambda_0 I - A)x_n = y$. Тогда из написанного выше неравенства следует, что предел $s - \lim_{n\to\infty} x_n$ тоже существует. Так как оператор *A* - замкнутый, то $(\lambda_0 I - A)x = y$. Поэтому

$R(\lambda_0 I - A) = X$, ибо, согласно предположениям теоремы, $\overline{R(\lambda_0 I - A)} = X$.

Пример 1. Если пространство *X* конечномерно, то всякому ограниченному линейному оператору *A* соответствует некоторая матрица (a_{ij}). Как известно, собственными значениями оператора *A* являются в этом случае корни так называемого *характеристического*, *уравнения* матрицы (a_{ij}):

$$\det(\lambda\delta_{ij} - a_{ij}) = 0\,,$$

где $\det(A)$ обозначает определитель матрицы A.

Заметим, что *кратность характеристического корня* λ_0 может оказаться большей или равной (но не меньшей), чем кратность собственного значения λ_0, определенная как размерность соответствующего собственного подпространства.

Пример 2. Пусть $X = L^2[0,1]$ и оператор A определяется формулой $A(x(s)) = \varphi(s)\cdot x(s)$ $A(x(s)) = \varphi(s)\cdot x(s)$, где $\varphi(s)$ - непрерывная функция. Нетрудно видеть, что любое $\lambda \in R(\varphi(s))$ - образу $\varphi(s)$ принадлежит непрерывному спектру $C_\sigma(A)$.

Пример 3. Примем за X гильбертово пространство (l^2) и определим оператор A_0 условием $A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$.

Тогда число $\lambda_0 = 0$ принадлежит остаточному спектру оператора A так как множество $R(A_0)$ не является плотным в X.

Теорема 2. Пусть A - замкнутый линейный оператор, область определения и область значений которого принадлежат комплексному B- пространству X. Тогда резольвентное множество $\rho(A)$ образует открытую область комплексной плоскости и функция $R(\lambda, A)$ голоморфна по λ, в каждом из связных открытых подмножеств области $\rho(A)$.

Доказательство. Резольвента $R(\lambda, A)$ при всяком $\lambda \in \rho(A)$ представляет собой непрерывный линейный оператор, определенный во всем пространстве X. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$; рассмотрим ряд

$$S(\lambda) = R(\lambda_0, A)\left\{ I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (R(\lambda_0, A))^n \right\}$$

Этот ряд сходится по норме операторов в круге $\|R(\lambda_0, A)\| \cdot |\lambda - \lambda_0| < 1$ комплексной плоскости и определяет внутри этого круга голоморфную функцию переменной λ. Если умножить $S(\lambda)$ слева или справа на $(\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A) = (\lambda I - A)$, то получится тождественный оператор I; это означает, что ряд $S(\lambda)$ представляет резольвенту $R(\lambda, A)$. Тем самым показано, что при любом $\lambda_0 \in \rho(A)$ существует круговая окрестность точки λ_0, принадлежащая $\rho(A)$, в которой резольвента $R(\lambda, A)$ голоморфна.

Теорема 3. Если $\lambda, \mu \in \rho(A)$ и если операторы $R(\lambda, A)$ и $R(\mu, A)$ определены во всем пространстве *X* и непрерывны, то справедливо равенство

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) \cdot R(\lambda, A) \cdot R(\mu, A),$$

которое называется ***резольвентным уравнением*** или ***тождеством Гильберта.***

Доказательство. Непосредственные вычисления дают

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, A)(\mu I - A)R(\mu, A) = R(\lambda, A)\{(\mu - \lambda)I + (\lambda I - A)\}R(\mu, A) =$$
$$= (\mu - \lambda) \cdot R(\lambda, A) \cdot R(\mu, A) + R(\mu, A).$$

Теорема 4. Если ограниченный линейный оператор *A* отображает комплексное *B*-пространство *X* в себя, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left\| A^n \right\|^{1/n} = r_\sigma(A).$$

Предел $r_\sigma(A)$ называется *спектральным радиусом* оператора *A*; для него имеет место оценка $r_\sigma(A) \le \|A\|$.

Если $|\lambda| > r_\sigma(A)$, то резольвента $R(\lambda, A)$ существует и представляется рядом вида $R(\lambda, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} A^{n-1}$, который сходится по норме операторов.

Доказательство. Положим $\underline{\lim} \left\| A^n \right\|^{1/n} = r$ при n>1. Достаточно показать, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| A^n \right\|^{1/n} \le r$. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем такое целое положительное число *m*, что $\left\| A^m \right\|^{1/m} < r + \varepsilon$. Далее, для произвольного целого *n* обозначим через *q* величину, удовлетворяющую условиям *n* = *pm*+*q*, $0 \le q \le (m-1)$

(*p* - целое). Тогда, используя неравенство $\|BC\| \le \|B\| \cdot \|C\|$, получаем

$$\left\| A^n \right\|^{1/n} \le \left\| A^m \right\|^{p/n} \cdot \|A\|^{q/n} \le (r + \varepsilon)^{mp/n} \|A\|^{q/n}.$$

Поскольку $pm/n \to 1$ и $q/n \to 0$ при $n \to \infty$, то должно выполняться неравенство $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| A^n \right\|^{1/n} \le r + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ существование предела $\lim_{n\to\infty} \left\| A^n \right\|^{1/n} = r_\sigma(A)$ доказано.

Поскольку $\left\| A^n \right\| \le \|A\|^n$, имеем $r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \left\| A^n \right\|^{1/n} \le \|A\|$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} A^{n-1}$ сходится по норме операторов при $|\lambda| > r_\sigma(A)$. В самом деле, если $|\lambda| \geq r_\sigma(A) + \varepsilon$ где $\varepsilon > 0$, то для достаточно больших значений n $\|\lambda^{-n} A^n\| \leq (r_\sigma(A) + \varepsilon)^{-n} \cdot (r_\sigma(A) + \varepsilon / 2)^n$, откуда видно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} A^{n-1}$ сходится. Умножая этот ряд на $\lambda I - A$ слева или справа, мы получаем тождественный оператор *I* поэтому резольвента представляется рядом

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} A^{n-1}.$$

Следствие. Для всякого ограниченного линейного оператора *A*, отображающего *B*-пространство *X* в себя, резольвентное множество $\rho(A)$ непусто.

Задача. Доказать, что для всякого оператора, отображающего *B*-пространство *X* в себя, $\sigma(A)$ непусто.

Задача. Для всякого ограниченного линейного оператора $A \in L(X, X)$ (где X - некоторое *B*-пространство) имеет место формула $r_\sigma = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

3.1.2. Операторное исчисление

Рассмотрим ограниченный линейный оператор $A \in L(X, X)$, где X - комплексное *B*-пространство. Мы определим функцию *f*(*A*) от оператора *A* формулой, аналогичной интегральной формуле Коши:

$$f(A) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda,$$

для этого обозначим через *F*(*A*) совокупность всех комплексных функций $f(\lambda)$, голоморфных в некоторой окрестности спектра $\sigma(A)$ оператора *A*. Эти окрестности не обязательно связны и могут зависеть от $f(\lambda)$. Пусть $f \in F(A)$, и пусть открытое множество $U \supset \sigma(A)$-комплексной плоскости содержится в области голоморфности функции *f*. Допустим также, что граница Γ этого множества состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда ограниченный линейный оператор *f*(*A*) определяется формулой

$$f(A) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda$$

Согласно интегральной теореме Коши, значение $f(A)$ зависит только от функции f и оператора *A* и не зависит от выбора области *U*.

Следующая теорема служит основой *операторного исчисления.*

Теорема (Данфорд). Если функции f и g принадлежат множеству *F*(*A*) и

α и β — произвольные комплексные числа, то справедливы следующие утверждения:

1) $\alpha f+\beta g\in F(A)$ и $\alpha f(A)+\beta g(A)=(\alpha f+\beta g)(A)$;

2) $f\cdot g\in F(A)$ и $f(A)\cdot g(A)=(f\cdot g)(A)$;

3) если разложение Тейлора $f(\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n$ функции f сходится в окрестности U спектра $\sigma(A)$, то $f(A)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n$ (сходимость понимается в смысле топологии, определяемой нормой оператора).

Интеграл $(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma} f(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda$ называют *интегралом Данфорда- Тейлора.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно.

Доказательство утверждения (2). Пусть U_1 и U_2 - открытые окрестности спектра, границы Γ_1 и Γ_2 которых состоят из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, и пусть $(U_1\cup\Gamma_1)\subseteq U_2$, а множество $(U_2\cup\Gamma_2)$ содержится в области голоморфности функций f и g. Используя резольвентное уравнение и интегральную формулу Коши, мы получаем

$$f(A)\cdot g(A)=-(4\pi^2)^{-1}\int\limits_{\Gamma_1} f(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda\cdot\int\limits_{\Gamma_2} g(\mu)R(\mu,A)d\mu=$$

$$=-(4\pi^2)^{-1}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(R(\lambda,A)-R(\mu,A))d\lambda d\mu=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma_1} f(\lambda)R(\lambda,A)\{(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma_2}(\mu-\lambda)^{-1}g(\mu)d\mu\}d\lambda-$$

$$-(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma_2} g(\mu)R(\mu,A)\{(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma_1}(\mu-\lambda)^{-1}f(\lambda)d\lambda\}d\mu=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma_1} f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda=(f\cdot g)(A).$$

Доказательство утверждения (3). По предположению область U содержит внутри себя некоторый круг вида $\{\lambda:|\lambda|\le r_\sigma(A)+\varepsilon,\varepsilon>0\}$, где $r_\sigma(A)$ - спектральный радиус оператора A (теорема 4, п.3.1.1.). Поэтому степенной ряд $f(\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n$ равномерно сходится в круге $C=\{\lambda:|\lambda|\le r_\sigma(A)+\varepsilon,\varepsilon>0\}$.

Отсюда, используя разложение резольвенты в ряд Лорана $R(\lambda, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} A^{n-1}$ и интегральную формулу Коши, мы выводим равенство

$$f(A) = (2\pi i)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_{\Gamma_C} \lambda^k R(\lambda, A) d\lambda = (2\pi i)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_C} \lambda^{k-n} A^{n-1} d\lambda \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k ,$$

где Γ_c - граница круга C, что и требовалось доказать.

Следствие 1. (теорема об отображении спектра). Если функция f принадлежит множеству $F(A)$, то $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$). Определим вспомогательную функцию g-формулой $g(\mu) = (f(\lambda) - f(\mu))/(\lambda - \mu)$. По доказанной теореме $f(\lambda)I - f(A) = (\lambda I - A) g(A)$. Поэтому, если оператор $f(\lambda)I - f(A)$ имеет ограниченный обратный B, то $g(A)B$ будет ограниченным оператором, обратным $\lambda I - A$. Таким образом, из условия $\lambda \in \sigma(A)$ следует, что $f(\lambda) \in \sigma(f(A))$. Обратно, пусть $\lambda \in \sigma(f(A))$; предположим, что $\lambda \notin (f(\sigma(A))$. Тогда функция $g_1(\mu) = (f(\mu) - \lambda)^{-1}$ принадлежит $F(A)$ и, следовательно, по доказанной теореме $g_1(A)(f(A) - \lambda A) = I$, а это противоречит предположению о том, что $\lambda \in \sigma(f(A))$.

Следствие 2. Если $f \in F(A)$, $g \in F(f(A))$ и $h(\lambda) = g(f(\lambda))$, то функция h принадлежит $F(A)$ и $h(A) = g(f(A))$.

Доказательство. Включение $h \in F(A)$ вытекает из следствия 1. Пусть U_1 – открытая окрестность множества $\sigma(f(A))$, граница которой Γ_1 состоит из конечного числа спрямляемых жордановых дуг, и множество $U_1 \cup \Gamma_1$ содержится в области голоморфности функции g. Пусть U_2 - открытая окрестность множества $\sigma(A)$, граница которой Γ_2 состоит из конечного числа спрямляемых жордановых дуг, и множество $U_2 \cup \Gamma_2$ содержится в области голоморфности функции f, причем $f(U_2 \cup \Gamma_2) \subseteq U_1$. Тогда

$$S = R(\lambda, f(A)) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_2} (\lambda - f(\mu)^{-1} R(\mu, A) d\mu$$

при всех значениях $\lambda \in \Gamma_1$. Оператор S удовлетворяет уравнению $(\lambda I - f(A))S = S(\lambda I - f(A)) = I$. Применяя формулу Коши, получаем

$$g(f(A)) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} g(\lambda) R(\lambda, f(A)) d\lambda =$$

$$= (-4\pi^2)^{-1} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} g(\lambda)(\lambda - f(\mu))^{-1} R(\mu, f(A)) d\mu d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_2} g(f(\mu)) R(\mu, A) d\mu = h(A),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3. Решение задачи Коши

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0)=x_0,$$

где A - ограниченный линейный оператор $A \in L(X, X)$, может быть представлено в виде

$$x(t) = ((2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \exp(t\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda)(x_0), \qquad (!)$$

где Γ состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении и охватывающих спектр оператора A. Спектр оператора $\exp(A)$ удовлетворяет соотношению

$$\sigma(\exp A) = \exp(\sigma(A)).$$

Следствие 4. Решение неоднородной задачи Коши

$$\dot{x} = Ax + b(t), \qquad x(0)=x_0,$$

где A - ограниченный линейный оператор $A \in L(X, X)$, может быть представлено в виде

$$x(t) = ((2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \exp(t\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda)(x_0) +$$

$$+ \int_0^t (((2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \exp((t-s)\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda)) b(s) ds.$$

Здесь $b(t)$ – измеримая, локально суммируемая функция.

Следствие 5. Решение задачи Коши для уравнения вида

$$\dot{x} = (A + \alpha B(t))x, \qquad x(0)=x_0,$$

где $A + \alpha B(t)$ - ограниченные, непрерывные, линейные операторы $(A + \alpha B(t)) \in L(X, X)$ при любом t, существуют и могут быть найдены как решения интегрального уравнения

$$x(t) = ((2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \exp(t\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda)(x_0) -$$

$$-\alpha\int_0^t (((2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \exp((t-s)\lambda)(\lambda I - A)^{-1}d\lambda))B(s)x(s)ds\,.$$

Замечание. Идея построения операторного исчисления на основе формулы Данфорда- Тейлора восходит к работам Пуанкаре по теории непрерывных групп (1899 г.). Приведенное здесь изложение операторного исчисления заимствовано из книги Данфорда — Шварца. Формула Данфорда – Тейлора допускает распространение на неограниченные замкнутые операторы.

п.3.1.3. Разбиение спектра и пространства

Нас будет интересовать случай, когда спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in L(X,X)$ разделен единичной окружностью $C_1 = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ на две части $\sigma'(A)$ и $\sigma''(A)$, причем $\sigma'(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < 1\}$. Каждая из частей может содержать конечное множество точек или быть пустой. Единичная окружность C_1 принадлежит $\rho(A)$. В такой ситуации справедлива следующая *теорема о разложении*:

Теорема. Пусть $\sigma(A)$ допускает описанное выше разбиение на части $\sigma'(A)$ и $\sigma''(A)$. Тогда существует разложение пространства на два инвариантные относительно оператора A подпространства X^s и X^u такие, что:

1) $X = X^s \oplus X^u$;

2) $A(X^s) \subseteq X^s$ и $A(X^u) \subseteq X^u$;

3) Спектры частей $A|_{X^s}$ и $A|_{X^u}$ совпадают с частями $\sigma'(A)$ и $\sigma''(A)$ соответственно.

Доказательство. Положим $P = (2\pi i)^{-1}\int_{C_1} R(\lambda, A)d\lambda \in L(X,X)$.

Очевидно, что $P^2 = P$. Таким образом, P - проектор на $X_s = PX$ параллельно подпространству $X_u = (I — P)\,X$. Более того, $PR(\lambda,A) = R(\lambda,A)P \quad (\lambda \in \rho(A))$ и P коммутирует с A; это означает, что A разложим относительно прямой суммы $X = X^s \oplus X^u$ на части $A_1 = A|_{X^s}$ и $A_2 = A|_{X^u}$.

Нетрудно видеть, что части $R(\lambda, A_1)$ и $R(\lambda, A_2)$ резольвенты $R(\lambda, A)$ в подпространствах X^s и X^u суть операторы, обратные к $\lambda I - A_1$ и $\lambda I - A_2$ соответственно. Отсюда следует, что $\rho(A_1)$ и $\rho(A_2)$ содержат $\rho(A)$. Кроме того, $\rho(A_1)$ содержит $\sigma''(A)$. Чтобы убедиться в этом, отметим прежде всего, что $R(\lambda, A_1)x = R(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Px$ для $x \in X^s$, $\lambda \in \rho(A)$. Для любой точки

$\lambda \in \rho(A)$, согласно резольвентному уравнению, имеем

$$R(\lambda, A)P = (2\pi i)^{-1}\int_{C_1} R(\lambda, A)R(\mu, A)d\mu =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{C_1} (\lambda-\mu)^{-1}(R(\lambda, A)-R(\mu, A))d\mu .$$

Если λ лежит вне контура C_1, то $R(\lambda, A)P = (2\pi i)^{-1}\int_{C_1} (\lambda-\mu)^{-1}R(\mu, A)d\mu$.

Таким образом, $R(\lambda, A)P$ голоморфна вне контура C_1, и, следовательно, $\rho(A_1)$ содержит внешнюю часть, ограниченную C_1 , и, следовательно, $\sigma(A_1)\subset\sigma'(A)$. Аналогичным образом $\sigma(A_2)\subset\sigma''(A)$.

С другой стороны, точка $\lambda\in\sigma(A)$ не может принадлежать одновременно $\rho(A_1)$ и $\rho(A_2)$; в противном случае она принадлежала бы $\rho(A)$.Отсюда следует, что $\sigma(A_1)=\sigma'(A)$ и $\sigma(A_2)=\sigma''(A)$. Теорема доказана.

Определение. Обратимое линейное отображение $A: X \to X$ называется ***гиперболическим***, если его спектр не пресекается с единичной окружностью.

Динамические свойства гиперболических линейных отображений проясняет следующее следствие, заключение которого можно рассматривать как эквивалентное определение гиперболичности.

Следствие. Пусть $A: X \to X$ - гиперболическое линейное отображение. Тогда существуют норма $\|\circ\|_2$ в пространстве X, эквивалентная норме $\|\circ\|$, и разложение пространства X в прямую сумму инвариантных относительно A подпространств X^s и X^u таких, что в операторной норме, порожденной нормой $\|\circ\|_2$ - норма операторов $A_s = A_1 = A|_{X^s}$ и $\left(A_u\right)^{-1} = (A_2)^{-1} = (A|_{X^u})^{-1}$ меньше 1.

Доказательство. Существование инвариантного разложения следует из доказанной теоремы.

Осталось построить норму $\|\circ\|_2$ и доказать утверждение относительно норм операторов A_s и $(A_u)^{-1}$. Для этого заметим, что спектральный радиус $r_\sigma(A_s)$ оператора A_s меньше 1. Поэтому найдутся число a: $r_\sigma(A_s) < a < 1$ и натуральное число p такие, что $\|A_s^p\| < a^p$.

Значит, числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{-pn}\left\|A_s^{pn}\right\|$ сходится (так как он мажорируется геометрической прогрессией), и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{-n}\left\|A_s^{n}\right\|$ тоже сходится. Положим для $x_1 \in X^s$ $\|x_1\|_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{-n}\left\|A_s^n x_1\right\|$.

Точно так же для $x_2 \in X^u$ положим $\|x_2\|_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{-n}\left\|A_u^{-n} x_2\right\|$, здесь число a выбирается аналогичным образом из рассмотрения оператора A_u^{-1}, причем, очевидно, можно выбрать общее a для обоих операторов. Расширим эти нормы до нормы во всем пространстве $X = X^s \oplus X^u$, положив

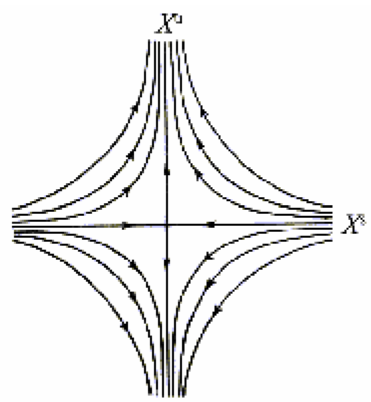
$$\|x\|_2^2 = \|\{x_1, x_2\}\|_2^2 = \left(\|x_1\|_2\right)^2 + \left(\|x_2\|_2\right)^2.$$

Очевидно, что $\|A_s\|_2 < a$ и $\left\|A_u^{-1}\right\|_2 < a$.

Покажем, наконец, что норма $\|\circ\|_2$ эквивалентна прежней норме $\|\circ\|$. Действительно, для любого $x_1 \in X^s$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n}\left\|A_s^n\right\|\|x_1\| \le \|x_1\|_2 \le \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\left\|A_s^n\right\|\|x_1\|$$

и аналогичные неравенства справедливы для любого вектора $x_2 \in X^u$.



Доказанное следствие дает удовлетворительное описание динамического поведения произвольного гиперболического линейного отображения: пространство X разлагается на «сжимающуюся» и «растягивающуюся» части, и, в силу линейности, все точки, не лежащие в подпространствах X^s и X^u, асимптотически приближаются к X^u при положительных итерациях A и асимптотически приближаются к X^s под действием отрицательных итераций A. Заметим, что в частных случаях одно из подпространств X^s или X^u может оказаться тривиальным. Мы дадим этим случаям специальные названия. Именно, будем называть гиперболическую неподвижную точку 0 отображения A

1) *источником*, или *отталкивающей точкой*, если $X = X^u$;
2) *стоком*, или *притягивающей точкой*, если $X = X^s$;

3) *седловой точкой*, если оба подпространства X^u и X^s ненулевые.

3.1.4. Линейные системы в конечномерном пространстве

В этом пункте мы конкретизируем приведенные раннее результаты для вещественного конечномерного пространства R^n.

Теорема (вещественная каноническая форма матрицы). Пусть $A \in L(R^n, R^n)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой базис в пространстве R^n, в котором матрица оператора A имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} B_1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & B_r & & \\ & & C_1 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & C_s \end{array}\right),$$

где $$B_i = \left(\begin{array}{c|cc|c} \lambda_i & \varepsilon & & 0 \\ \hline 0 & \lambda_i & \varepsilon & \\ & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ \hline 0 & & 0 & \lambda_i \end{array}\right), \qquad C_j = \left(\begin{array}{cc|c|cc} \alpha_j & \beta_j & \varepsilon & 0 & 0 \\ -\beta_j & \alpha_j & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline & & \dots & & \varepsilon \\ \hline & 0 & 0 & \alpha_j & \beta_j \\ 0 & & 0 & -\beta_j & \alpha_j \end{array}\right).$$

Матрицы $B_1,\ldots,B_r$, $C_1,\ldots,C_s$ определены однозначно, с точностью до перестановки. Корни характеристического многочлена - $\sigma(A) = \{\lambda_i \in R, \alpha_j \pm i\beta_j \in C\}$.

Определение. Линейное векторное поле, соответствующее системе $\dot{x} = Ax$, $x \in R^n$ называется ***гиперболическим***, если спектр A целиком лежит вне мнимой оси.

Приведенное определение согласуется с определением для отображений, так как по теореме об отображении спектра $\tilde{A}^t = \exp(tA)$ - гиперболическое линейное отображение при любом $t > 0$.

Таким образом, для гиперболических векторных полей пространство R^n разлагается в прямую сумму двух подпространств $R^n = X^s \oplus X^u$ и система $\dot{x} = Ax$ распадается на две подсистемы $\dot{x}_1 = A_1 x_1$, $x_1 \in X^s$ и $\dot{x}_2 = A_2 x_2$, $x_2 \in X^u$. Для всех $\lambda \in \sigma(A_1)$ имеем $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, а для всех $\lambda \in \sigma(A_2)$ имеем $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

Выбирая $0 < \varepsilon < 1/2(\min\{|\lambda_i|, |\alpha_j|\}$ и считая базис, в котором матрица A имеет каноническую жорданову форму ортонормированным, мы можем на каждом из подпространств X^s и X^u задать скалярное произведение таким образом, чтобы выполнялись соотношения: $(x_1, A_1 x_1) < 0$, где $x_1 \in X^s, x_1 \neq 0$ и $(x_2, A_2 x_2) > 0$, где $x_2 \in X^u, x_2 \neq 0$. Таким образом, на каждом из подпространств X^s и X^u траектории потока $\exp(tA)x$ пересекают сферу трансверсально, т.е. имеют в пересечении со сферой одну точку пересечения.

Определение. Два линейных векторных поля, соответствующих системам $\dot{x} = Bx$ и $\dot{x} = Cx$ называют ***топологически эквивалентными***, если существует гомеоморфизм $h: R^n \to R^n$ такой, что $h \circ \exp(tB) = \exp(tC) \circ h$.

Введенное отношение является отношением эквивалентности.

Теорема. Два гиперболических векторных поля $\dot{x} = Bx$ и $\dot{x} = Cx$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\dim(X^s(B)) = \dim(X^s(C))$ и $\dim(X^u(B)) = \dim(X^u(C))$.

Доказательство. Предположим сначала, $\dim(X^u(B)) = \dim(X^u(C)) = 0$ и пусть $\|\circ\|_B$ и $\|\circ\|_C$ такие нормы на R^n, что сферы $S_1^{n-1} = \{x \in R^n : \|x\|_B = 1\}$ и $S_2^{n-1} = \{x \in R^n : \|x\|_C = 1\}$ трансверсальны к полям B и C соответственно. Так как для $x \in R^n \setminus 0$ имеет место $\lim\limits_{t \to +\infty} \exp(tB) = 0$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \|\exp(-tB)\| = \infty$, то траектория $\exp(tB)x$ обязательно пересекается со сферой S_1^{n-1} в единственной точке. Аналогично и для потока $\exp(tC)x$.

Пусть $h_0 : S_1^{n-1} \to S_2^{n-1}$ - любой гомеоморфизм, например, можно положить $h_0(x) = \dfrac{x}{\|x\|_C}$. Теперь продолжим h_0 на R^n. Положим $\tilde{h}(0) = 0$, $\tilde{h}(sx) = sh_0(x)$, где $s > 0$. Если $x \in R^n \setminus 0$, то существует единственное такое $t_0 \in R$, что $\exp(-t_0 B)x \in S_1^{n-1}$. Положим $h = \exp(t_0 C) \circ \tilde{h} \circ \exp(-t_0 B)$. Легко видеть, что $h \circ \exp(tB) = \exp(tC) \circ h$ при всех $t \in R$ и что h имеет обратное. Непрерывность h при $x \in R^n \setminus 0$ следует из непрерывной зависимости потока от начальных данных. Покажем, что h непрерывно в нуле. Из компактности сферы S_2^{n-1} и эквивалентности норм в R^n следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $t_\varepsilon > 0$, что $\|\exp(tC)\| < \varepsilon$ при всех $t > t_\varepsilon$. С другой стороны, так как $\exp(tB)(0) = 0$, то существует такое $\delta > 0$, что если $\exp(-t_0 B)x \in S_1^{n-1}$, то $t > t_\varepsilon$. Таким образом, $\|h(x)\| < \varepsilon$, если $\|x\| < \delta$, что показывает непрерывность h. Аналогично можно показать, что отображение h^{-1} непрерывно. Теперь пусть $\dim(X^s(B)) = \dim(X^s(C))$ и $\dim(X^u(B)) = \dim(X^u(C))$. Тогда существует гомеоморфизм $h_s : X^s(B) \to X^s(C)$, сопрягающий $\exp(tB)|_{X^s(B)}$ и $\exp(tC)|_{X^s(C)}$, т.е. $h_s \circ \exp(tB)|_{X^s(B)} = \exp(tC)|_{X^s(C)} \circ h_s$ при всех $t \in R$. Аналогично, существует гомеоморфизм $h_u : X^u(B) \to X^u(C)$, сопрягающий $\exp(tB)|_{X^u(B)}$ и $\exp(tC)|_{X^u(C)}$. Определим $h : X^s(B) \oplus X^u(B) \to X^s(C) \oplus X^u(C)$ формулой $h(x_1 + x_2) = h_s(x_1) + h_u(x_2)$, где $x_1 \in X^s(B)$, $x_2 \in X^u(B)$. Легко видеть, что h - гомеоморфизм, сопрягающий $\exp(tB)$ и $\exp(tC)$.

Обратно, пусть h - топологическая эквивалентность между $\exp(tB)$ и $\exp(tC)$. Так как 0 - единственная особая точка полей B и C, то мы должны иметь $h(0) = 0$. Если $x \in X^s(B)$, то $\omega(x) = 0$. Так как топологическая эквивалентность сохраняет ω - предельные множества траекторий, имеем $\omega(h(x)) = h(\omega(x)) = 0$. Поэтому $h(x) \in X^s(C)$, так что $h(X^s(B)) \subset X^s(C)$. Аналогично $h^{-1}(X^s(C)) \subset X^s(B)$. Следовательно, $h|_{X^s(B)}$ - гомеоморфизм между $X^s(B)$ и $X^s(C)$. По топологической теореме об инвариантности размерности получаем, что $\dim(X^s(B)) = \dim(X^s(C))$. Аналогично $\dim(X^u(B)) = \dim(X^u(C))$. Теорема доказана.

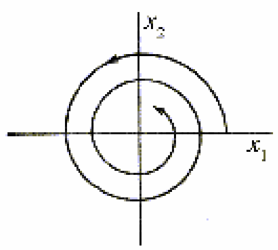
Определение. Линейное векторное поле, соответствующее системе $\dot{x} = Ax$, $x \in R^n$ называется ***грубым*** в пространстве линейных векторных полей, если существует окрестность U оператора A такая, что любое линейное векторное поле, соответствующее системе $\dot{x} = Bx$, $B \in U$ топологически эквивалентно векторному полю $\dot{x} = Ax$.

Следствие. Всякое гиперболическое векторное поле является грубым в пространстве линейных векторных полей.

Доказательство. Пусть $A \in L(C^n, C^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $B \in L(C^n, C^n)$ и $\|A - B\| < \delta$, то для каждого $\lambda' \in \sigma(B)$ существует $\lambda \in \sigma(A)$ с $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$. Действительно, окружая каждую точку $\lambda \in \sigma(A)$ открытым кругом радиуса $\varepsilon > 0$, учитывая ограниченность операторов A и B, непрерывность определителя убеждаемся в существовании такого $\delta > 0$, что внешности выбранных кругов $V_\varepsilon = \{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \geq \varepsilon, \lambda_i \in \sigma(A)\}$ принадлежит $\rho(B)$ для любого $B \in L(C^n, C^n)$ и $\|A - B\| < \delta$. Отметим , что простые полюса резольвенты соответствуют простым корням характеристического уравнения, корням кратности *k* соответствуют полюса порядка *k*. Таким образом, в случае простых корней имеем их непрерывную зависимость. Учитывая возможность комплексификации вещественного пространства, получаем грубость гиперболических систем.

В заключении этого пункта приведем классификацию грубых систем на плоскости вида

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2\,,$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2\,.$$

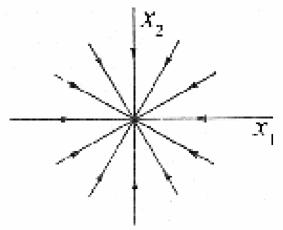


Устойчивый (неустойчивый) фокус.

Собственные числа : $\lambda_1 = \alpha + i\beta\,, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha < 0\,(\alpha > 0\,)$, $\beta \neq 0$.

Каноническая форма : $\dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2\,,$

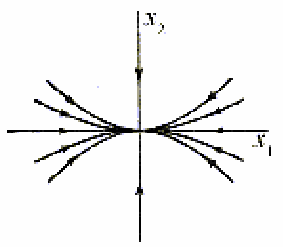
$$\dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2$$



Устойчивый (неустойчивый) узел (собственный) Собственные числа : $\lambda_1 = \lambda_2 < 0\,(\ \lambda_1 = \lambda_2 > 0\,)$.

Каноническая форма : $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1\,,$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2\ \ (\lambda_1 = \lambda_2\,)$$

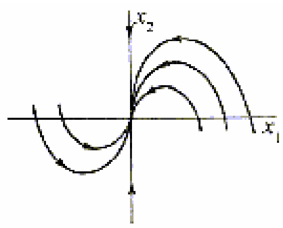


Устойчивый (неустойчивый) узел (несобственный, простой)

Собственные числа : $\lambda_1 < 0\,, \lambda_2 < 0\,(\ \lambda_1, \lambda_2 > 0\,)$.

Каноническая форма : $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1\,,$

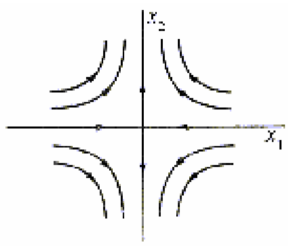
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2\ \ \ (\lambda_1\lambda_2 \neq 0\,)\ .$$



Устойчивый (неустойчивый) узел (вырожденный) Собственные числа : $\lambda_1 = \lambda_2 < 0\,(\ \lambda_1 = \lambda_2 > 0\,)$.

Каноническая форма : $\dot{x}_1 = \lambda x_1\,,$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \lambda x_2\ \ (\lambda \neq 0\,).$$



Седло

Собственные числа : $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0\,.$

Каноническая форма : $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1\,,$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2\ \ .$$

Отметим, что первые четыре векторных поля топологически эквивалентны полю, соответствующему системе

$$\dot{x}_1 = \mu x_1,$$
$$\dot{x}_2 = \mu x_2, \qquad (\mu^2 = 1),$$

пятое топологически эквивалентно системе

$$\dot{x}_1 = -x_1,$$
$$\dot{x}_2 = x_2.$$

Кроме грубых систем на плоскости имеются следующие негрубые системы:

Центр соответствует системе с чисто мнимыми корнями и в канонической форме система имееет вид

$$\dot{x}_1 = \beta x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\beta x_1.$$

Для центра фазовыми траекториями является семейство концентрических окружностей.

Негрубыми системами также являются системы, для которых особая точка 0 не изолирована. Эти системы в канонической форме имеют вид:

$$1) \quad \dot{x}_1 = \lambda x_1, \quad \dot{x}_2 = 0, \qquad \text{и} \quad 2) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0.$$

Фазовые траектории в этом случае принадлежат семейству параллельных прямых.

§ 2. Линейные аналитические уранения

3.2.1. Предварительные сведения. Теория Флоке - Ляпунова

В этом параграфе $A\ (t)$ обозначает сильно непрерывный или аналитический оператор $A(t) \in L(X, X)$. Пространство *X*, если не оговорено или явно не следует из текста, не предполагается конечномерным, и, вообще говоря, некоторое *B*-пространство над комплексным полем. Переменная *t* также комплексная или вещественная. В случае вещественного *t* операторы *A*(*t*) предполагаются сильно непрерывными и ограниченными на замкнутых интервалах вещественной оси. В случае комплексного *t* операторы *A*(*t*) представляют собой аналитическую функцию от *t*, определенную в некотором открытом множестве *U* комплексной плоскости. Слово «аналитический» используется здесь в смысле «регулярно аналитический», т.е. *A*(*t*) не имеет иных конечных особых точек кроме полюсов.

Напомним основной результат:

Теорема 1. Задача Коши для неоднородного уравнения $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет единственное решение $x(t, t_0, x_0)$ такое, что $x(t_0, t_0, x_0)= x_0$.

Тот факт, что оператор $A(t)$ комплексный, не играет роли при доказательстве теоремы, простейшее доказательство которой получается непосредственным применением стандартного метода последовательных приближений. Из единственности решений вытекает

Следствие 1. Если $x(t, t_0, x_0)$ является таким решением однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, что для некоторого t_1 $x(t_1, t_0, x_0)=0$, то $x(t, t_0, x_0) = 0$.

Для решений однородной и неоднородной системы имеет место следующая очевидная теорема.

Теорема 2 (принцип суперпозиции). 1) Пусть $x_i(t)$, i=1,2 решения однородной системы. Тогда любая их линейная комбинация $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ с постоянными коэффициентами c_1, c_2 также является решением однородной системы. 2) Если $x_1(t)$ и $x_0(t)$ являются соответственно решениями однородной и неоднородной системы, то $x_1(t) + x_0(t)$ является решением неоднородной системы. Обратно, если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются решениями, неоднородной системы, то $x_1(t) - x_2(t)$ решение однородной системы.

Вместе с уравнением $\dot{x} = A(t)x$ можно рассматривать уравнение в $L(X,X)$ вида

$$\dot{H} = A(t)H .$$

Фундаментальным оператором $H(t)$ для системы $\dot{x} = A(t)x$ называется решение операторного уравнения $\dot{H} = A(t)H$, удовлетворяющее условию $H(t_0) = H_0$, где H_0 - обратимый оператор в X. При $H_0 = I$ фундаментальный оператор обозначаем $H(t,t_0)$.

Отметим, что для автономного линейного уравнения $H(t,t_0) = \exp((t-t_0)A)$.

Таким образом, решение системы записывается виде $x(t, t_0, x_0) = H(t,t_0)x_0$

Замечание. Очевидно, что вместе с решением $H(t,t_0)$ решением системы является $H(t,t_0)C$, где $C \in L(X,X)$. Таким образом, справедливо следующее утверждение

Утверждение. Пусть $H(t) = H(t, t_0)$ является фундаментальным решением уравнения $\dot{H} = A(t)H$. Тогда $H(t, t_0)=H(t, s)\, H(s, t_0)$.

Доказательство. Так как при $C = H(s, t_0)$ оператор $H(t, s)\, H(s, t_0)$ является фундаментальным решением, то в силу единственности решения утверждение доказано.

Таким образом, операторы $H(t, s)$ - обратимы.
В конечномерном случае этот факт в усиленной форме можно сформулировать в виде следующей теоремы.
Теорема 3 (Лиувилль). Пусть $H(t, t_0)$ фундаментальное решение уравнения $\dot{H} = A(t)H$ в конечномерном пространстве .Тогда

$$\det(H(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s)ds\right) \neq 0 .$$

Для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ ее след tr A определяется как сумма диагональных элементов, т.е. $\operatorname{tr}(A) = \sum a_{ii}$.

Доказательство. Пусть $A(t) = (a_{ij}(t))$, $i,j=1,\ldots,n$. Применяя к $\det H(t,t_0)$ обычное правило дифференцирования определителя, получаем $(\det(\dot{H}(t,t_0)) = \sum_i \det(H_i(t))$, где $H_i(t)$ - матрицы, полученные из матрицы $H(t, t_0)=Y(t)$ заменой её i - й строки $(h_{i1}(t,t_0),...,h_{in}(t,t_0))$ её производными $(\dot{h}_{i1}(t,t_0),...,\dot{h}_{in}(t,t_0))$.

Ясно, что i-я строка, согласно уравнению $\dot{H} = A(t)H$, матрицы $H_i(t)$ состоит из суммы в a_{ii} раз увеличенной j-й строки матрицы $H(t, t_0)$ и линейной комбинации остальных строк $H_i(t)$. Поэтому $\det(H_i(t)) = a_{ii}(t)\det(H(t,t_0))$, откуда

$(\det(\dot{H}(t,t_0)) = \operatorname{tr}(A(t))\det(H(t,t_0))$, что и дает требуемое равенство.

Задача. Привести пример автономной линейной системы вида
$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, обладающей следующими свойствами:

1) $\operatorname{tr}(A)<0$, $\operatorname{tr}(D)<0$;
3) существуют решения подсистем $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = x_0 \neq 0$ и $\dot{y} = Dy$, $y(t_0) = y_0 \neq 0$, для котрых выполнено $\|x(t,t_0,x_0)\| \to \infty$ и $\|y(t,t_0,y_0)\| \to \infty$ при $t \to +\infty$;
3) $\|(x(t,t_0,(x_0,y_0)), y(t,t_0,(x_0,y_0))\| \to 0$ при $t \to +\infty$ при любом $(x(t,t_0,(x_0,y_0)), y(t,t_0,(x_0,y_0)))$ - решении системы $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Задача. . Пусть A (t) является ($n \times n$)-матрицей, непрерывной при $t \geq 0$ и такой, что каждое решение $x(t)$ системы $\dot{x} = A(t)x$ и ограничено для $t \geq 0$. Пусть H (t,t_0) - фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$. Покажите, что $H(t_0,t)$ ограничена тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^t \mathrm{tr}(A(s))ds\right)$ограничена снизу.

Рассмотрим системы с периодическими коэффициентами.

Как это видно из следующей теоремы, рассмотрение системы с переменными, но периодическими коэффициентами теоретически может быть сведено к системе с постоянными коэффициентами.

Теорема 4. Пусть в уравнении $\dot{x} = A(t)x$ оператор $A(t)$, вообще говоря комплексный, сильно непрерывен и периодичен с периодом ω, т.е. $A(t+\omega) = A(t)$.

Тогда любой обратимый оператор, удовлетворяющий уравнению $\dot{Y} = A(t)Y$ допускает представление вида $Y(t) = Z(t)C(t)$, где оператор $Z(t)$ удовлетворяет соотношению $Z(t+\omega) = Z(t)$.

Если спектр оператора $C(\omega)$ не окружает нуля, то C (t) представимо в виде $C(t) = \exp(Rt)$.

Заметим, что ни оператор R, ни его спектр уравнением $\dot{x} = A(t)x$ не определяются однозначно. Например, представление $Y(t) = Z(t)\exp(tR)$, может быть заменено представлением $Z(t)e^{\frac{-2\pi it}{\omega}}\exp(t(R+\frac{2\pi iI}{\omega})$, где оператор $Z(t)$ заменяется оператором $Z(t)e^{\frac{-2\pi it}{\omega}}$, а оператор R - оператором $R+\frac{2\pi iI}{\omega}$. С другой стороны, спектр оператора $C(\omega)$ однозначно определяются уравнением $\dot{x} = A(t)x$. Спектр оператора $C(\omega)$, называется ***мультипликативным спектром*** уравнения $\dot{x} = A(t)x$ (в случае дискретного спектра оператора $\exp(R)$ - ***мультипликаторами***). Спектр оператора определенный с точностью до $\frac{2\pi ik}{\omega}$, где k- целое, называется ***характеристическим спектром*** уравнения $\dot{x} = A(t)x$ (в случае дискретного спектра оператора R - ***характеристическими показателями*** уравнения $\dot{x} = A(t)x$). Отметим, что разделение спектра на дискретную, непрерывную и остаточную часть остаются в силе.

Доказательство теоремы 4. Так как $Y(t)$ обратимый оператор, удовлетворяющий уравнению $\dot{Y} = A(t)Y$, то из $A(t+\omega) = A(t)$ следует, что оператор $Y(t+\omega)$ также обратимый оператор, удовлетворяющий уравнению $\dot{Y} = A(t)Y$. Поэтому найдется обратимый ограниченный оператор $C(\omega)$ такой, что оператор $Y(t+\omega) = Y(t)\,C(\omega)$. Ниже мы покажем, что из условия обратимости оператора $C(\omega)$ следует существование (но не единственность) оператора R такого, что $C(\omega) = \exp(R\omega)$ т.е. $\ln(C) = R\omega$. Если это так, то $Y(t+\omega) = Y(t)\exp(R\omega)$. Положим $Z(t) = Y(t)\exp(-Rt)$. Тогда

$$Z(t+\omega) = Y(t+\omega)\exp(-(t+\omega)R) =$$

$$= [Y(t+\omega)\exp(-\omega R)]\exp(-tR) = Y(t)\exp(-tR).$$

Таким образом, $Z(t+\omega) = Z(t)$, что и утверждалось.

Для завершения доказательства осталось проверить существование оператора *R*, удовлетворяющего равенству $C = \exp(R\omega)$. Выберем область *U* в комплексной плоскости, содержащую весь спектр оператора *C* и не содержащую точку 0. Пусть Г- граница *U*, состоящая из конечного числа гладких жордановых кривых, охватывающих весь спектр оператора *C*. Выбирая в каждой из подобластей голоморфную ветвь функции $\phi(\lambda) = \ln(\lambda)$, определим

$$R = \frac{1}{2\pi i\omega}\int_{\Gamma} \ln(\mu)R(\mu, C)d\mu.$$

Поскольку $\exp(\ln(\lambda) = \lambda$, то $C = \exp(R\omega)$.

Следует отметить, что выбор области *U* и ветви функции $\phi(\lambda) = \ln(\lambda)$ не единственен. Поэтому существуют различные операторы ln*C*, удовлетворяющие соотношению $C = \exp(R\omega)$. Спектры операторов *R* отличаются на целое кратное числа $2\pi i/\omega$. Отметим также, что спектр оператора *C* обязан быть таким, чтобы указанный выше выбор области *U* был возможен, т.е. должна существовать кривая на комплексной плоскости, соединяющая 0 и ∞ и принадлежащая резольвентному множеству оператора $C(\omega)$.

Определение характеристических показателей очень сложно даже для линейных уравнений второго порядка и соответствующих им систем на плоскости . Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = a(t)x$, где $a(t)$ - функция с вещественным периодом 2ω аналитическая в полосе $-\eta \le v \le \eta$, (*t*=*u*+*iv*) с вещественной осью внутри неё. В данном случае уравнение, которому удовлетворяют мультипликаторы имеет вид $\lambda^2 - A\lambda + 1 = 0$, где *A* – постоянная, зависящая только от функции $a(t)$. Если $a(t) > 0$, то $A > 2$ и все корни характеристического уравнения вещественны и нулевое решение неустойчиво. Ляпунов показал, что если

$a(t) < 0$ для всех вещественных t и $\left|2\omega\int\limits_0^{2\omega} a(s)ds\right| \le 4$, то $|A| < 2$ и мультипликаторы - сопряженные комплексные числа с модулем равным единице.

Задача. Найти вид областей устойчивости на плоскости ε, ω для уравнения

вида $\ddot{x} = -(a(t))^2 x$, $a(t) = \begin{cases} \omega+\varepsilon, & 0 < t < \pi, \\ \omega-\varepsilon, & \pi < t < 2\pi, \end{cases}$ $\varepsilon \ll 1$, $a(t+2\pi) = a(t)$.

Теория Флоке –Ляпунова, по – видимому, была выведена из теории уравнений с двояко-периодическими функциями. Простейшим примером двояко - периодической функции является эллиптический синус, получаемый, как обращение интеграла $t = \int\limits_0^w \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$, отображающего верхнюю полуплоскость на прямоугольник с вершинами $\pm\omega$, $\pm\omega + i\omega'$. Обратная функция $w = \mathrm{sn}(t, k)$ продолжается по принципу симметрии на всю плоскость. Основными периодами функции $w = \mathrm{sn}(t, k)$ являются эллиптические интегралы

$\omega = \int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$ и $\omega' = \int\limits_1^{1/k} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}}$,

т.е. $T = k\omega + il\omega'$, $k, l \in Z$.

Для уравнений с двояко-периодическими функциями справедлива следующая теорема.

Теорема. Если коэффициенты однородного линейного дифференциального уравнения - двояко-периодические функции независимой переменной, то уравнение имеет фундаментальное семейство решений, которое, если они однозначны, является в общем случае двояко - периодическими функциями второго порядка.

Так для уравнения Ляме $\ddot{x} = \{h + n(n+1)\wp(t)\}x$, где h- постоянная, n - положительное целое число, $\wp(t)$ функция Вейерштрасса, особыми точками которой являются начало и точки вида $2m\omega + 2m'\omega'$, одно однозначное решение имеет вид $x_1(t) = (t - 2m\omega - 2m'\omega')^{n+1} W(t)$, где $W(t)$ – аналитическая функция в области точек вида $2m\omega + 2m'\omega'$ и не равная в них нулю. Второе решение имеет вид $x_2(t) = cx_1(t)\int \frac{ds}{(x_1(s))^2}$, где c – постоянная. Два независимых решения уравнения Ляме вида $\ddot{x} = \{h + 2\wp(t)\}x$, могут быть также представлены в виде $(\wp(t) - h)^{1/2}(\zeta(t + \omega_1) + ht)$ $(\wp(t) - h)^{1/2}$, $(\wp(t) - h)^{1/2}(\zeta(t + \omega_1) + ht)$, где $\zeta(t)$ - « дзета - функция Вейерштрасса».

Естественным пространством при исследовании уравнений с периодическим оператором $A(t)$ в случае вещественного t является $S^1 \times X$, где под окружностью S^1 следует понимать вещественную прямую, для которой точки t и $t + k\omega, k \in Z$ отождествлены. В случае комплексного t - комплексную плоскость с отождествленными точками t и $t + k\omega, k \in Z$. Это пространство наглядно следует представлять в виде цилиндра. Для уравнений с двоякопериодическим оператором $A(t)$ следует профакторизовать комплексную плоскость по дискретной группе движений $t \to t + k\omega + il\omega', k, l \in Z$. В результате такой факторизации получается двумерный тор.

3.2.2. Простые особенности

В этом пункте будем иметь дело с линейным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad (*)$$

в котором t является комплексной переменной, а оператор $A(t)$ представляет собой однозначную аналитическую функцию t, определенную в некотором открытом множестве U из t - плоскости. Если множество U односвязно, мы получаем, что оператор $H(t)$ существует во всей области U и является там однозначным и аналитическим.

Будем рассматривать случай, когда область U не является односвязной, а представляет собой круг $0 < |t| < a$ с выколотой точкой $t = 0$ (эту область мы будем в дальнейшем называть кольцом).

Лемма 1. Пусть $A(t)$ - однозначный аналитический оператор, заданный в кольце $0 < |t| < a$. Предположим, что $A(t)$ в точке $t = 0$ не является аналитическим. Тогда уравнение $\dot{x} = A(t)x$, не может иметь фундаментального оператора $H(t)$, который был бы в кольце $0 < |t| < a$ однозначным, аналитическим и допускал бы обратимое продолжение на $t = 0$.

Доказательство. Предположив противное, мы получим, что операторы $H(t)$ и $Y^{-1}(t)$ являются аналитическими во всем круге $| t \backslash < a$. Но в таком случае оператор $A(t) = \dot{H}(t)H^{-1}(t)$ будет иметь в точке $t = 0$ устранимую особенность, что исключено по предположению.

Теорема 1. Пусть $A(t)$ - однозначный аналитический оператор, заданный в кольце $0 < |t| < a$. Тогда любой фундаментальный оператор $H(t)$ (который не обязательно однозначен) системы (*) допускает представление вида

$H(t) = Y(t)t^R$,

где $Y(t)$ - однозначный аналитический оператор в кольце $0 < |t| < a$,

R – постоянный оператор.

Доказательство. Пусть $H(t)$ - фундаментальный оператор уравнения (*), определенный локально в окрестности некоторой точки $t=t_0$, $0 < |t_0| < a$, и продолжен аналитически на остальные t, что, возможно, делает его многозначным. Пусть при обходе точкой t окружности с центром в точке $t = 0$ оператор $H(t)$ возвращается в окрестность точки $t = t_0$ со значением $H_0(t)$. Так как $A(t)$ однозначен, то $H_0(t)=H(t)T$ останется для системы (*) фундаментальным оператором. Поэтому найдется постоянный обратимый оператор T такой, что $H_0(t)=H(t)T$. В силу аналитичности соотношения $H_0(t)=H(t)T$ оно останется справедливым и для аналитических продолжений матриц $H(t)$ и $H_0(t)$.

Рассмотрим для фиксированного r, $0<r<a$, операторы $H(\theta,r) = H(re^{i\theta})$ аргумента $\theta, -\infty < \theta < \infty$. Тогда $H(\theta + 2\pi, r) = H(\theta, r)C$ или

$H(\theta + 2\pi, r) = H(\theta, r)\exp(2\pi i R)$, где $2\pi i R = \ln T$. Построение оператора R и ограничение на спектр (спектр не окружает нуля) аналогичны теореме Флоке – Ляпунова. Легко видеть, что оператор $Y(\theta,r) = H(\theta,r)\exp(-2\pi i R)$ имеет по θ период 2π.

Заметим теперь, что оператор $Y(\theta,r)t^{-R} = H(\theta,r)\exp(-i\theta R)t^{-R} = H(t)t^{-R}$ является аналитическим оператором от t, который однозначен (ибо $Y(\theta,r)$ имеет по θ период 2π). Теорема доказана.

Принимая во внимание то, что оператор $H(t)$ является для системы (*) фундаментальным, можно установить ряд свойств операторов $Y(t)$ и R. Например, найдем для $Y(t)$ дифференциальное уравнение, которому он удовлетворяет. Так как оператор R коммутирует с t^R и $\dot{(t^R)} = Rt^R/t$, то $Y(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{Y} = -\dfrac{YR}{t} + A(t)Y$.

Точка $t = 0$ называется для уравнения (*) ***регулярной особой точкой***, если все решения уравнения (*) в каждом секторе плоскости t растут не быстрее некоторой (отрицательной) степени модуля t ($\|H(t,0)\| \le \frac{c}{|t|^k}$), когда t стремится к нулю, оставаясь внутри сектора (показатель в этой оценке общий для всех секторов и всех решений) ($\|H(t,0)\| \le \frac{c}{|t|^k}$).

В этом случае имеет место

Следствие. Пусть оператор $A(t)$ аналитичен и однозначен в кольце $0 < |t| < a$, и точка $t = 0$ является для уравнения (*) регулярной особой точкой. Тогда уравнение (*) имеет фундаментальный оператор $H(t)$ вида

$$H(t) = Y(t)\, t^D,$$

где оператор D постоянен, а оператор $Y(t)$ аналитичен в круге $|t| < a$.

Действительно, если $Y(t)$ из формулы $H(t) = Y(t)\, t^D$ имеет в $t = 0$ самое большее полюс, то его можно переписать в виде $H(t) = Y(t) t^n t^{R-nI} = Y_0 t^D$, где оператор $Y_0(t) = Y(t) t^n$ аналитичен в $t = 0$ при подходящем выборе целого числа $n>0$, а $D = R — nI$.

Если особенность оператора $A(t)$ в точке $t = 0$ есть самое большее полюс порядка 1, то будем говорить, что система (*) имеет в точке $t = 0$ ***простую особенность*** или, что $t = 0$ есть простая особая точка этого уравнения. В этом случае уравнение (*) может быть представлена в виде

$$t\dot{x} = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^k \right) x,$$

где A_0, A_1, A_2, … - постоянные операторы, а ряд $A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^k$ сходится в круге $|t| < a$.

Если ввести новую независимую переменную $s = \ln t$, то уравнение принимает вид $\frac{dx}{ds} = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{ks} \right) x$, $\operatorname{Re} s < a$.

Если $A_1 = A_2 = \ldots = 0$, то полученное уравнение превращается в $\frac{dx}{ds} = A_0 x$ и тогда оно имеет решение $x = \exp(A_0 s) x_0 = t^{A_0} x_0$.

Теорема 2 (Соваж). Пусть в точке t = 0 система (*) имеет простую особенность, так что (*) представимо в виде $t\dot{x}=\left(A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k t^k\right)x$, где ряд $A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k t^k$ при $|t|<a$ сходится. Тогда точка t = 0 является для уравнения $t\dot{x}=\left(A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k t^k\right)x$ регулярной особой точкой.

В этой теореме предполагается, что норма в пространстве X удовлетворяет условию:
для любой кривой класса $x(t)\in C^1[a,b]$ в равномерном смысле выполнено неравенство $\left|D_r\|x(t)\|\right|\le\|\dot{x}(t)\|$ для $a\le t<b$.

Эта теорема сразу же вытекает из следующей леммы:
Лемма 2. Пусть в точке t=0 система (*) имеет простую особенность и пусть эта система имеет однозначное и аналитическое в кольце $0<|t|<a$ решение $x(t)$. Тогда $x(t)$ в точке t = 0 или аналитично, или имеет полюс.

Так как эта лемма применима и к системе $\dot{Y}=-\frac{YR}{t}+A(t)Y$, то оператор $Y(t)$ или аналитичен в точке t= 0, или имеет в ней полюс.

Доказательство леммы 2. Пусть θ фиксировано, $0\le\theta<2\pi$ и пусть $t=re^{i\theta}$, так что $dt=e^{i\theta}dr$ и потому вектор $x(re^{i\theta})$ является решением уравнения $\frac{dx}{dr}=e^{i\theta}A(re^{i\theta})x$, где $0<r<a$. Из условий, наложенных на оператор $A(t)$, следует существование постоянной c такой, что $\|A(re^{i\theta})x\|\le c\|x\|/r$ при $0<r<a/2$, где c некоторая постоянная. Поэтому любое решение $x\ne 0$ удовлетворяет неравенству $\frac{d\|x\|}{dr}\le\frac{c\|x\|}{r}$ при $0<r<a/2$. Отсюда $\|x(re^{i\theta})\|\le\frac{c_1}{r^c}$ для $0<r<a/2$ и подходящим образом подобранной постоянной c_1. Значит, если n - некоторое положительное целое число $n>c$, то функция $t^n x(t)$ ограничена для малых $|t|$ и, следовательно, аналитична в точке t = 0. Таким образом, $x(t)$ имеет в точке t= 0 самое большее полюс порядка n. Лемма и теорема доказаны.

Теорема, обратная к теореме 2, неверна. Это легко видеть из следующего примера. Система $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=2x_1^2/t^2\end{cases}$ имеет фундаментальную матрицу

$$H(t)=\begin{pmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t^{-1} & -t^{-2} \end{pmatrix},$$

для которой $H(t) = Y(t)$ и $R = 0$. Значит, точка $t = 0$ является для этой системы регулярной особой точкой, но простой особенностью она не является.

3.2.3. Условия Фукса

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + p_1(t)\dot{x} + p_0(t) = 0,$$

в котором коэффициенты являются однозначными аналитическими функциями в кольце $0 < |t| < a$. Вместо того, чтобы представлять уравнение обычным способом, как систему первого порядка, преобразуем его в систему относительно вектора $y = (y^1,\dots, y^n)$, где

$$y^j = t^{j-1}x^{(j-1)}, \qquad j=1,\dots,n.$$

Тогда $$t\dot{y}^j = (j-1)y^j + y^{j+1}, \quad j=1,\dots,n-1,$$

$$t\dot{y}^n = (n-1)y^n - \sum_{k=1}^{n} t^{n-(k-1)} p_{k-1}(t) y^k .$$

Таким образом, точка $t = 0$ будет для этой системы простой особой точкой, если функция $t^{n-k}p_k(t)$ является аналитической в точке $t= 0$ при $k = 0,\dots, n$— 1, т.е. если $p_k(t)$ имеет в точке $t= 0$ самое большее полюс n-k порядка. Положим в этом случае

$$a_k(t) \equiv t^{n-k}p_k(t) = a_{k0} + \sum_{m=1}^{\infty} p_{km}t^m, \quad k=0,\dots,n-1,$$

где a_{k0} и p_{kn} - постоянные, а ряд, стоящий в правой части, сходится при $|t| < a$.

Тогда уравнение имеет вид

$$x^{(n)} + t^{-1}a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + t^{-(n-1)}a_1(t)\dot{x} + t^{-n}a_0(t) = 0,$$

где функции $a_0(t), a_1(t),..., a_{n-1}(t)$ являются в точке $t = 0$ аналитическими. Запишем полученную систему в виде $t\dot{y} = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^k\right) y$, где A_0 — постоянная матрица вида

$$A_0 = \left(\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{00} & -a_{10} & -a_{20} & -a_{30} & (n-1)-a_{n-1,0} \end{array} \right).$$

Матрица коэффициентов правой части системы сводится к постоянной матрице A_0, если $p_{km} = 0$ для $k = 0, ..., n — 1$ и $m = 1, 2, ...$. Это соответствует случаю, когда уравнение имеет вид

$$x^{(n)} + t^{-1}a_{n-1,0}x^{(n-1)} + ... + t^{-(n-1)}a_{10}\dot{x} + t^{-n}a_{00} = 0,$$

где $a_{00}, a_{10}, ..., a_{n-1,0}$ - постоянные. Это уравнение называется ***дифференциальным уравнением Эйлера***. Его решения легко определить, если учесть, что фундаментальная матрица для соответствующей системы равна $H(t) = t^{A_0}$. Тогда множество линейно независимых решений уравнения Эйлера состоит из функций вида $t^{\alpha}(\ln t)^l$.

Вернемся к общему уравнению и соответствующей системе. Докажем следующую теорему.

Теорема 3(Фукс). Пусть функции $p_k(t)$ являются однозначными и аналитическими в кольце $0 < |t| < a$. Тогда для того, чтобы точка $t = 0$ являлась для системы

$$t\dot{y}^j = (j-1)y^j + y^{j+1}, \quad j=1,\ldots,n\text{-}1,$$

$$t\dot{y}^n = (n-1)y^n - \sum_{k=1}^{n} t^{n-(k-1)} p_{k-1}(t) y^k$$

регулярной особой необходимо и достаточно, чтобы в этой точке ряды

$$t^{n-k} p_k(t) = a_{k0} + \sum_{m=1}^{\infty} p_{km} t^m$$

сходились.

Ясно, что точка $t = 0$ является для системы регулярной особой в том и только том случае, когда решения уравнения представляют собой линейные комбинации функций вида $t^{\lambda}(\ln t)^k \alpha(t)$, где $\alpha(t)$ является функцией, аналитической при $|t| < a$.

Доказательство. Достаточность условия следует из теоремы 2. Остается доказать лишь необходимость.

Из теоремы 1 следует, что уравнение имеет по крайней мере одно решение вида $x_1(t) = t^{\lambda}\alpha_1(t)$, где функция $\alpha_1(t)$ аналитическая в кольце $0 < |t| < a$. Если предположить, что точка t = 0 является для системы регулярной особой точкой, то функция $\alpha_1(t)$ будет иметь в t = 0 самое большее полюс. В действительности за счет выбора λ можно считать, что функция $\alpha_1(t)$ является в точке t = 0 аналитической. В частности, $\alpha_1(t) \neq 0$ для малых | t | > 0.

Доказательство будем вести индукцией по n. Рассмотрим сначала уравнение 1-го порядка $\dot{x} + p_0(t)x = 0$ с решением $x_1(t) = t^{\lambda}\alpha_1(t)$, где $\alpha_1(t)$ аналитична в точке t = 0. Ясно, что функция $p_0(t) = -\dfrac{\dot{x}_1(t)}{x(t)}$ имеет в точке t=0 самое большее полюс порядка n = 1.

Предположим, что n > 1 и что теорема для уравнений порядка n - 1 справедлива. Пусть x= $x_1(t)$ является решением описанного выше типа. Введем для малых t> 0 новую зависимую переменную $y(t) = \dfrac{x(t)}{x_1(t)}$. Тогда получим уравнение вида $y^{(n)} + q_{n-2}(t)y^{(n-1)} + ... + q_0(t)\dot{y} = 0$, которое для функции $\dot{y}$ будет уравнением (n— 1)-го порядка.

Легко видеть, что

$$q_{n-2}(t) = C_{n1}(\dot{x}_1 / x_1) + p_{n-1}(t)\ q_{n-2}(t) = C_{n,1}(\dot{x}_1 / x_1) + p_{n-1}(t),$$

$$q_{n-3}(t) = C_{n,2}(\ddot{x}_1 / x_1) + C_{n-1,1}p_{n-1}(t)(\dot{x}_1 / x_1) + p_{n-2}(t), \qquad (\Delta)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$q_0(t) = C_{n,n-1}(x_1^{(n-1)} / x_1) + C_{n-1,n-2}p_{n-1}(t)(x_1^{(n-2)} / x_1) + ... + p_1(t),$$

и так как x= $x_1(t)$ является решением уравнения, то

$$0 = (x_1^{(n)} / x_1) + p_{n-1}(t)(x_1^{(n-1)} / x_1) + ... + p_0(t), \qquad (\Delta\,\Delta)$$

где $C_{j,k} = \dfrac{j!}{k!(j-k)!}$.

Полученное уравнение имеет порядок n - 1 для $\dot{y}$ и имеет решение $\dot{y} = (x \dot{/} x_1)$, определяемое произвольным решением x (t) заданного уравнения. Следовательно, точка t = 0 является регулярной особой точкой для системы, связанной с полученным уравнением. Поэтому по предположению индукции функция $t^{n-1-k}q_k(t)$ является в точке t = 0 аналитической, k = 0, . . ., n-2. Значит, $x_1^{(k)} / x_1$ имеет в точке t = 0 самое большее полюс порядка k. Тогда из (Δ) и ($\Delta\,\Delta$)

следует, что p_{n-1} имеет в точке $t = 0$ самое большее полюс порядка 1, p_{n-2} - полюс порядка 2 и т.д. Теорема доказана.

Задача. Изучите поведение решений в конечных особых точках следующих уравнений:

а) $t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - a^2)x = 0$ (уравнение Бесселя);

б) $(1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + n(n+1)x = 0$ (уравнение Лежандра);

в) $(1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + (n(n+1) - m^2)x = 0$ (присоединенное уравнение Лежандра).

Коль я здоровый, не убогий,
Зачем мне группы гомотопий?
Зачем же мне мозгами двигать,
Коль я с шестом умею прыгать?
“Голубушка”

3.2.3. Группа монодромии

Рассмотрим линейное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x\,, \qquad (*)$$

в котором t является комплексной переменной, а оператор $A(t)$ имеет конечное числом регулярных особых точек. Бесконечно удаленная точка регулярно особая, если таковой является точка 0 при замене $t' = 1/t$.

Пусть $\tilde{C}(a_1, a_2, ..., a_k) = \bar{C} \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, где $\bar{C}$ - пополненная бесконечно удаленной точкой комплексная плоскость, $a_1, a_2, ..., a_k$ - регулярные особые точки. В $\tilde{C}$ фиксируется точка $t_0 \in \tilde{C}$ и рассматриваются всевозможные петли, т.е. непрерывные отображения $\varphi : [0,1] \to \tilde{C}$ такие, что $\varphi(0) = \varphi(1) = t_0$.

Две петли $\varphi_1(s_1)$ и $\varphi_2(s_1)$ называются гомотопными, если существует гомотопия, т.е. непрерывное отображение $f : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{C}$ такое, что $f(0, s_1) = \varphi_1(s_1)$ и $f(1, s_1) = \varphi_2(s_1)$. Отношение гомотопности разбивает всевозможные петли на классы эквивалентности. Нетрудно убедиться в том, что в каждом классе имеется гладкая петля. Произведением петель $\varphi_1(s_1)$ и $\varphi_2(s_1)$ называется петля $\varphi(s)$, где $\varphi(s) = \varphi_1(2s)$ при $0 \le s \le 1/2$ и где $\varphi(s) = \varphi_2(2s-1)$ при $1/2 \le s \le 1$. Иными словами, произведение двух петель - это петля, составленная из двух петель, которые проходятся последовательно, сначала φ_1, потом φ_2. Как легко проверить, умножение порождает умножение и в множестве классов гомотопных петель. При этом последнее, относительно введенной операции, является группой, обозначаемой $\pi_1(\tilde{C},t_0)$. Напомним, что ***группой*** называется множество G, в котором введена операция произведение $(*)$, удовлетворяющая условиям:

1. $a*(b*c)=(a*b)*c$ - ассоциативность;

2. для любых элементов a и b из G существует единственное решение уравнений: $a*x=b$ и $y*a=b$.

Ясно, что класс, обратный к классу $\overline{\varphi}\in\pi_1(\tilde{C},t_0)$, содержащему петлю $\varphi:[0,1]\to\tilde{C}$, содержит петлю $\varphi':[0,1]\to\tilde{C}$, определенную формулой $\varphi'(s)=\varphi(1-s)$. Так как $\tilde{C}$ линейно связно, т.е. для любых двух точек t_1 и t_2 существует путь $\alpha:[0,1]\to\tilde{C}$ такой , что $\alpha(0)=t_1$ и $\alpha(1)=t_2$, то любой петле $\varphi_2\in\overline{\varphi}_2\in\pi_1(\tilde{C},t_2)$ можем поставить в соответствие петлю $\varphi_1\in\overline{\varphi}_1\in\pi_1(\tilde{C},t_1)$ по формуле $\varphi_1=\alpha^{-1}\cdot\varphi_2\cdot\alpha\in\overline{\varphi}_1\in\pi_1(\tilde{C},t_1)$. Очевидно, что при замене φ_2 на гомотопные пути, путь $\varphi_1=\alpha^{-1}\cdot\varphi_2\cdot\alpha$ также заменится на гомотопный, а потому построенное отображение определяет отображение групп $\pi_1(\tilde{C},t_2)$ на $\pi_1(\tilde{C},t_1)$. Обратное отображение строится совершенно аналогично. Легко проверяется, что построенное отображение есть изоморфизм групп. Таким образом, мы можем считать группу $\pi_1(\tilde{C},t_0)$, не зависящей от t_0. Поэтому для этой группы употребляется обычно обозначение $\pi_1(\tilde{C})$ и название ***фундаментальная группа пространства*** $\tilde{C}$.

Фундаментальная группа $\pi_1(\tilde{C}(a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1}))$ изоморфна свободной группе с свободными образующими $\tau_1,...,\tau_k$, т.е. группе слов вида $\tau_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdot\tau_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots\tau_{i_n}^{\varepsilon_n}$, $n\geq 1$, в которых не могут стоять рядом элемент τ_i и его обратный, $\varepsilon_i^2=1$. Число n – длина слова. При k=1 (расширенная плоскость с двумя выколотыми точками) группа $\pi_1(\tilde{C}(a_1,a_2))$ изоморфна группе целых чисел. При k>1 группа $\pi_1(\tilde{C}(a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1}))$ некоммутативна.

Совершенно аналогично строится фундаментальная группа для любого линейно связного топологического пространства. Так при n>1 группа $\pi_1(S^n)$ тривиальна. Любая петля стягиваема по сфере в точку. Фундаментальная группа тора $\pi_1(T^n=S^1\times...S^n)$ изоморфна Z^n, где Z^n - декартово произведение группы целых чисел; фундаментальная группа $\pi_1(\tilde{C}(a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1}))$ изоморфна группе букета из k окружностей, т.е. пространства, состоящего из k окружностей, имеющих одну общую точку. Совершенно очевидно, что фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны.

Ответ на вопрос эпиграфа: Затем, чтобы грамотно отличить баранку от мячика.

Определение. Группа $G(a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1})$ называется ***группой монодромии*** уравнения $\dot{x} = A(t)x$ с конечным числом регулярных особых точек, если за несвободные образующие группы $\pi_1(\tilde{C}(a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}))$ выбраны операторы $T(a_i)$, i=1,…,k+1, возникающие при однократном обходе особой точки по окружности, не содержащей внутри себя особых точек, отличных от a_i.

Из теоремы Коши, возможности аналитического продолжения аналитической функции вдоль гладкой кривой и теоремы 1 вытекает корректность определения. Отметим, что для конечной особой точки движение по окружности идет против часовой стрелки, для бесконечной точки - по часовой стрелке.

3.2.4. Уравнение Римана

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую классическую задачу. Нужно определить функцию

$$P\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & t \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \end{Bmatrix},$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция должна быть однозначной и непрерывной во всей плоскости, за исключением особых точек a_1, a_2 , a_3 ;

2) между любыми тремя определениями P_1, P_2 , P_3 этой функции существует линейная зависимость c_1P_1+c_2 P_2+c_3 P_3=0, где c_1, c_2 , c_3 - постоянные;

3) в окрестности с точкой a_i существуют два независимых определения

$$(t-a_i)^{\alpha_i} f_{1,i}(t), \quad (t-a_i)^{\alpha_i'} f_{2,i}(t),$$

где $f_{1,i}(t)$ и $f_{2,i}(t)$ - аналитические в окрестности $t = a_i$ и не равны нулю в a_i (i=1,2,3) .

Пусть P_1 и P_2 будут любыми двумя линейно-независимыми определениями искомой функции. Тогда, поскольку любое другое определение находится в линейной зависимости от P_1 и P_2 , искомая функция будет удовлетворять дифференциальному уравнению второго порядка

$$\det\begin{pmatrix} \ddot{x} & \dot{x} & x \\ \ddot{P}_1 & \dot{P}_1 & P_1 \\ \ddot{P}_2 & \dot{P}_2 & P_2 \end{pmatrix} = 0,$$

которое может быть написано в виде $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$, где

$$p(t) = -\frac{P_2\ddot{P}_1 - P_1\ddot{P}_2}{P_2\dot{P}_1 - P_1\dot{P}_2}, \quad q(t) = \frac{\dot{P}_2\ddot{P}_1 - \dot{P}_1\ddot{P}_2}{P_2\dot{P}_1 - P_1\dot{P}_2}.$$

Рассмотрим поведение функции p в окрестности особой точки $t = a_i$. Пусть $P_1 = (t-a_i)^{\alpha_i} f_{1,i}(t)$, $P_2 = (t-a_i)^{\alpha_i'} f_{2,i}(t)$, тогда $p(t) = \dfrac{1-\alpha_i-\alpha_i'}{t-a_i} + \varpi_i(t)$,

где $\varpi_i(t)$ - функция аналитическая в окрестности точки $t = a_i$. Отсюда следует, что $p(t) = \sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{1-\alpha_i-\alpha_i'}{t-a_i} + u(t)$, где функция $u(t)$ будет везде аналитической.

Теперь, поскольку $p(t)$ - функция аналитическая в бесконечности, необходимо, чтобы для больших значений $|t|$ - $p(t) = 2/t + O(t^{-2})$. Но

$$p(t) = \frac{3 - \sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i - \alpha_i'}{t} + O(t^{-2}) + u(t)$$

а поскольку $u(t) = O(1)$, необходимо, чтобы $u(t) = 0$, следовательно

$$p(t) = \sum_{i=1}^{3}\frac{1-\alpha_i-\alpha_i'}{t-a_i}, \text{ где} \sum_{i=1}^{3}\alpha_i + \alpha_i' = 1.$$

Аналогично найдем, что в окрестности точки $t = a_i$

$$q(t) = \frac{\alpha_i\cdot\alpha_i'}{(t-a_i)^2} + O(1/(t-a_i)),$$

следовательно q может быть выражено в виде

$$q(t) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\alpha_i\cdot\alpha_i'}{(t-a_i)^2} + \frac{A_i(t)}{(t-a_i)}\right),$$

где $A_i(t)$ - конечны для всех конечных значений t.

Однако более удобно принять эквивалентное выражение

$$q(t) = \frac{1}{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{L_i(t)}{t-a_i}\right),$$

где $L_i(t)$ конечны для всех конечных значений t.

Поскольку бесконечно удаленная точка является обыкновенной точкой для больших значений $|t|$, то $q(t)=O(t^{-4})$, следовательно $L_i(t)$ - постоянные. Отсюда легко показать, что

$$L_1=\alpha_1\alpha_1'(a_1-a_2)(a_1-a_3),$$
$$L_2=\alpha_2\alpha_2'(a_2-a_3)(a_2-a_1),$$
$$L_3=\alpha_3\alpha_3'(a_3-a_1)(a_3-a_2).$$

Таким образом P- функция Римана удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{x}+(\sum_{i=1}^{3}\frac{1-\alpha_i-\alpha_i'}{t-a_i})\dot{x}+\frac{1}{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{L_i}{t-a_i}\right)x=0,$$

которое называется ***обобщенным гипергеометрическим уравнением*** (***уравнением Римана***). При $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3=\infty$, $\alpha_1'=\alpha_2'=0$, это уравнение преобразуется в обыкновенное ***гипергеометрическое*** уравнение

$$t(1-t)\ddot{x}+((\alpha_1+\alpha_2-2)t+1-\alpha_1)\dot{x}-\alpha_3\alpha_3'x=0.$$

Решения уравнения Римана дают искомые функции. Для того, чтобы они имели обусловленную форму, необходимо, чтобы ни одна из разностей показателей $\alpha_i-\alpha_i'$, i=1, 2, 3 не была целым числом, так как в противном случае в одно из решений вошли бы логарифмические члены.

Найдем теперь группу монодромии уравнения Римана.

Пусть P_{α_i} и $P_{\alpha_i'}$ будут двумя решениями, соответствующими показателям α_i и α_i' в особенности a_i.

Пусть Г будет любой замкнутой простой кривой, например кругом, проходящим через точки a_i. Тогда внутри Г все шесть решений будут аналитическими и между ними будут существовать соотношения

$$P_{\alpha_1}=A_{\alpha_2}P_{\alpha_2}+A_{\alpha_2'}P_{\alpha_2'}$$
$$P_{\alpha_1'}=A'_{\alpha_2}P_{\alpha_2}+A'_{\alpha_2'}P_{\alpha_2'}$$
$$P_{\alpha_1}=A_{\alpha_3}P_{\alpha_3}+A_{\alpha_3'}P_{\alpha_3'}$$
$$P_{\alpha_1'}=A'_{\alpha_3}P_{\alpha_3}+A'_{\alpha_3'}P_{\alpha_3'}$$

где $A_{\alpha_i}, A'_{\alpha_i'}$ - постоянные коэффициенты. Эти постоянные не все независимы; между ними существуют соотношения, которые мы сейчас определим.

Поскольку точка в бесконечности является обыкновенной, контур в положительном направлении вокруг точки a_3 эквивалентен контуру в отрицательном направлении вокруг точек a_1 и a_2. Третье из указанных соотношений показывает, что первый контур преобразует P_{α_1} в

$$e^{i2\pi\alpha_3}A_{\alpha_3}P_{\alpha_3}+e^{i2\pi\alpha_3'}A_{\alpha_3'}P_{\alpha_3'},$$

в то время как первое соотношение показывает, что второй контур преобразует P_{α_1} в $e^{-i2\pi\alpha_1}(A_{\alpha_2}e^{-i2\pi\alpha_2}P_{\alpha_2}+A_{\alpha_2'}e^{-i2\pi\alpha_2'}P_{\alpha_2'})$.

Следовательно $e^{i2\pi\alpha_3}A_{\alpha_3}P_{\alpha_3}+e^{i2\pi\alpha_3'}A_{\alpha_3'}P_{\alpha_3'}=e^{-i2\pi\alpha_1}(A_{\alpha_2}e^{-i2\pi\alpha_2}P_{\alpha_2}+A_{\alpha_2'}e^{-i2\pi\alpha_2'}P_{\alpha_2'})$

и аналогично $e^{i2\pi\alpha_3}A_{\alpha_3}P_{\alpha_3}+e^{i2\pi\alpha_3'}A'_{\alpha_3'}P_{\alpha_3'}=e^{-i2\pi\alpha_1}(A_{\alpha_2}e^{-i2\pi\alpha_2}P_{\alpha_2}+A_{\alpha_2'}e^{-i2\pi\alpha_2'}P_{\alpha_2'})$.

Но

$$P_{\alpha_1}=A'_{\alpha_3}P_{\alpha_3}+A'_{\alpha_3'}P_{\alpha_3'}=A'_{\alpha_2}P_{\alpha_2}+A'_{\alpha_2'}P_{\alpha_2'},$$

$$P_{\alpha_1'}=A'_{\alpha_2}P_{\alpha_2}+A'_{\alpha_2'}P_{\alpha_2'}=A'_{\alpha_3}P_{\alpha_3}+A'_{\alpha_3'}P_{\alpha_3'}.$$

Исключая $P_{\alpha_3},P_{\alpha_3'},P_{\alpha_2},P_{\alpha_2'}$ из этих четырех соотношений, найдем

$$\frac{A_{\alpha_3}}{A'_{\alpha_3}}=\frac{A_{\alpha_2}}{A'_{\alpha_2}}\cdot\frac{e^{-\pi i\alpha_1}\sin((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3')\pi)}{e^{-\pi i\alpha_1'}\sin((\alpha_1'+\alpha_2+\alpha_3')\pi)}=\frac{A_{\alpha_2'}}{A'_{\alpha_2'}}\cdot\frac{e^{-\pi i\alpha_1}\sin((\alpha_1+\alpha_2'+\alpha_3')\pi)}{e^{-\pi i\alpha_1'}\sin((\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3')\pi)},$$

$$\frac{A_{\alpha_3'}}{A'_{\alpha_3'}}=\frac{A_{\alpha_2}}{A'_{\alpha_2}}\cdot\frac{e^{-\pi i\alpha_1}\sin((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\pi)}{e^{-\pi i\alpha_1'}\sin((\alpha_1'+\alpha_2+\alpha_3)\pi)}=\frac{A_{\alpha_2'}}{A'_{\alpha_2'}}\cdot\frac{e^{-\pi i\alpha_1}\sin((\alpha_1+\alpha_2'+\alpha_3)\pi)}{e^{-\pi i\alpha_1'}\sin((\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3)\pi)}.$$

Следовательно, любое из соотношений $\frac{A_{\alpha_2}}{A'_{\alpha_2}}$, $\frac{A_{\alpha_2'}}{A'_{\alpha_2'}}$, $\frac{A_{\alpha_3}}{A'_{\alpha_3}}$, $\frac{A_{\alpha_3'}}{A'_{\alpha_3'}}$ известно.

Все четыре соотношения совместны, если

$$\frac{\sin((\alpha_1+\alpha_2'+\alpha_3')\pi)}{\sin((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3')\pi)}\frac{\sin((\alpha_1'+\alpha_2+\alpha_3')\pi)}{\sin((\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3')\pi)}=$$

$$=\frac{\sin((\alpha_1+\alpha_2'+\alpha_3)\pi)}{\sin((\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3)\pi)}\frac{\sin((\alpha_1'+\alpha_2+\alpha_3)\pi)}{\sin((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\pi)},$$

что выполнено на основании соотношения $\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i+\alpha_i')=1$.

Чтобы определить свободные образующие группы монодромии, достаточно рассмотреть изменения, которые претерпевают два фундаментальных решения, например P_{α_1} и $P_{\alpha_1'}$, когда точка t описывает контур вокруг каждой из двух особых точек, например a_1 и a_2. Контур, описываемый вокруг a_1 в положительном направлении, преобразует P_{α_1} и $P_{\alpha_1'}$, соответственно в

$e^{i2\pi\alpha_1}P_{\alpha_1}$ и $e^{i2\pi\alpha_1'}P_{\alpha_1'}$, и аналогично, описав положительный контур вокруг a_2, P_{α_1} и $P_{\alpha_1'}$ соответственно принимают значения $e^{i2\pi\alpha_2}A_{\alpha_2}P_{\alpha_2}+e^{i2\pi\alpha_2'}A_{\alpha_2'}P_{\alpha_2'}$.

Но
$$P_{\alpha_1}=A_{\alpha_2}P_{\alpha_2}+A_{\alpha_2'}P_{\alpha_2'},$$
$$P_{\alpha_1}=\lambda A_{\alpha_2}P_{\alpha_2}+\lambda' A_{\alpha_2'}P_{\alpha_2'},$$

где $\lambda=\dfrac{A'_{\alpha_2}}{A_{\alpha_2}}$, $\lambda'=\dfrac{A'_{\alpha_2'}}{A_{\alpha_2'}}$.

Полагая $u=(\lambda'-\lambda)P_\alpha, v=P_{\alpha'}$ в базисе u, v оператор $T(a_1)$ имеет матрицу
$$T(a_1)=\begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\alpha_1'} \end{pmatrix},$$

а оператор $T(a_2)$ имеет матрицу
$$T(a_2)=\begin{pmatrix} \dfrac{\mu e^{2\pi i\alpha_2}-e^{2\pi i\alpha_2'}}{\mu-1} & e^{2\pi i\alpha_2'}-e^{2\pi i\alpha_2} \\ \dfrac{\mu(e^{2\pi i\alpha_2}-e^{2\pi i\alpha_2'})}{(\mu-1)^2} & \dfrac{\mu e^{2\pi i\alpha_2'}-e^{2\pi i\alpha_2}}{\mu-1} \end{pmatrix},$$

где $\mu=\dfrac{\sin((\alpha_1+\alpha_2'+\alpha_3)\pi)}{\sin((\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3)\pi)}\dfrac{\sin((\alpha_1'+\alpha_2+\alpha_3)\pi)}{\sin((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\pi)}$.

Обе матрицы $T(a_1)$ и $T(a_2)$ могут рассматриваться как образующие группы монодромий. Для того, чтобы группа состояла из конечного числа элементов, необходимо, чтобы α_i и α_i' (i=1,2,3) были все рациональными числами.

Алгебраические решения уравнения Римана возможны в случаях, когда числа $\lambda_1=\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_1')$, $\lambda_2=\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_2')$, $\lambda_3=\frac{1}{2}(\alpha_3-\alpha_3')$ принимают следующие пятнадцать значений:

1) (1/2, 1/2, 1/n), 2) (1/2, 1/3, 1/3), 3) (2/3, 1/3, 1/3), 4) (1/2, 1/3, 1/4), **5) (**2/3, 1/4, 1/4), 6) (1/2, 1/3, 1/5), 7) (2/5, 1/3, 1/3), 8) (2/3, 1/5, 1/5), 9) (1/2, 2/5, 1/3), 10) (3/5, 1/3, 1/5), 11) (2/5, 2/5, 2/5), 12) (2/3, 1/3, 1/5), 13) (4/5, 1/5, 1/5), 14) (1/2, 2/5, 1/3), 15) (3/5, 2/5, 1/3).

Нахождение группы монодромий полезно при исследовании вопроса об интегрируемости в квадратурах. Линейные уравнения второго порядка, вообще говоря, не интегрируются в квадратурах. Под этим подразумевается, что решения не выражаются через коэффициенты с помощью арифметических действий, решения алгебраических уравнений, потенцирования и интегрирования.

При этом решение алгебраических уравнений не подразумевает решение в радикалах; считается, что вместе с каждым многочленом известно множество его нулей, и вместе с каждой функцией её интеграл. В частности, не интегрируется уравнение $\ddot{x}+tx=0$.

Однако, справедлив следующий геометрический результат.

Теорема (Хованского). Если группа монодромий системы, удовлетворяющей условиям Фукса, обладает разрешимым нормальным делителем конечного индекса, то эта система интегрируется в квадратурах.

Г Л А В А 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ.

§ 1. Теоремы существования

4.1.1. Метод мажорант

В этом пункте мы рассмотрим теорему о существовании и единственности аналитического решения $x(t,t_0,x_0)$ задачи Коши для системы уравнений вида

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0,t_0,x_0) = x_0,$$

где t – комплексное. Для того, чтобы система уравнений имела смысл, должна существовать производная $\dot{x}$, т.е. $x(t)$ должна быть аналитической функцией от t. Пусть $f(t,x)$ аналитическая функция переменных t и $x \in U \subset C^n$.

Основная теорема звучит так:

Теорема. Система дифференциальных уравнений допускает единственное решение $x(t,t_0,x_0)$, аналитическое внутри круга $|t-t_0| < r$ такое, что $x(t_0,t_0,x_0) = x_0$.

Метод Липшица, рассмотренный в главе 1, конечно, может быть здесь применен, однако, метод мажорант Коши здесь предпочтительнее.

В пространстве C^n введено стандартное скалярное произведение $(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$, где $\overline{y}_k = \mathrm{Re}(y_k) - i\,\mathrm{Im}(y_k)$, $i^2 = -1$; $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Введем некоторые обозначения: Пусть α - мультииндекс

$$\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n), \quad \alpha_i \in N \cup 0, i = 1,...,n, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

$$\alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \ x \in C^n.$$

Приведем некоторые свойства голоморфных (имеющих производную) функций, заданных в поликруге $K^n = \{(z_1,...,z_n) \in C^n : |z_j| \le r_j, j = 1,...,n\}$ с центром в точке 0. Это неравенство кратко записывается $|z| \le r$. Пусть Г- множество точек $|z| = r$. Тогда для точек $|z| < r$ (т.е.$|z_j| < r_j,\ j = 1,...,n$) справедлива формула Коши $f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\mu_1,...,\mu_n)}{(\mu_1 - z_1)\cdots(\mu_n - z_n)} d\mu_1...d\mu_n$.

Если $f(z)$ голоморфна в окрестности поликруга, то $f(z)$ разлагается в нормально сходящийся ряд $f(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha$, ($\alpha$ - мультииндекс), коэффициенты которого определяются формулой

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\mu_1,...,\mu_n)}{(\mu_1)^{j_1+1}\cdots(\mu_n)^{j_n+1}} d\mu_1...d\mu_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(r_1 e^{i\theta_1},...,r e^{i\theta_n})}{(r_1)^{j_1}\cdots(r_n)^{j_n}} \cdot \exp(-i\left(j_1\theta_1 + ... j_n\theta_n\right) d\theta_1...d\theta_n,$$

где $\alpha = (j_1,..., j_n)$. Из разложения в ряд видно, что $f(z)$ неограниченно дифференцируема и $D^\alpha(f(0)) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial z)^\alpha}(f(z))|_{z=0} = \frac{\partial^{j_1+...+j_n}}{\partial z_1^{j_1}...\partial z_n^{j_n}}(f(z))|_{z=0} = \alpha! a_\alpha$, так что разложение однозначно. Формула Тейлора в принятых обозначениях имеет вид $f(z) = \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha(f(0))}{\alpha!} z^\alpha$.

Дифференцирование формулы Коши дает

$$D^\alpha(f(z)) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\mu_1,...,\mu_n)}{(\mu_1 - z_1)^{j_1+1}\cdots(\mu_n - z_n)^{j_n+1}} d\mu_1...d\mu_n.$$

Если $f(z)$ голоморфна в K^n и $M = \max_{z\in\Gamma}\|f(z)\| = \max_{z\in K^n}\|f(z)\|$ (последнее равенство легко устанавливается с помощью формулы Коши), то

$$\|a_\alpha\| \le \frac{M}{r^\alpha}.$$

Определение. Функция $F : \overset{\circ}{K^n} \to C$ $(F(z) = \sum_{\alpha} b_\alpha z^\alpha)$ называется мажорантой Коши голоморфной функции $f(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha$, если $\|a_\alpha\| \le b_\alpha$.

Свойство функции быть мажорантой Коши записывается в виде $f \ll F$.

Из приведенных свойств голоморфных функций нескольких переменных и суммируя геометрическую прогрессию имеем $f \ll \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 - \frac{z_k}{r_k})}$. Используя аналог бинома Ньютона, нетрудно убедиться, что $f \ll \dfrac{M}{(1-\frac{z_1}{r_1})(1-\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{z_k}{r_k}\right))}$, где

$M = \max\limits_{z\in\Gamma}\|f(z)\| = \max\limits_{z\in K^n}\|f(z)\|$. Отметим также, что $\left|\dfrac{M}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{z_k}{r_k})}\right| \le \dfrac{M}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{|z_k|}{r_k})}$ и

$$\frac{M}{\left|(1-\frac{z_1}{r_1})(1-\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{z_k}{r_k}\right))\right|} \le \frac{M}{(1-\frac{|z_1|}{r_1})(1-\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{|z_k|}{r_k}\right))}$$ для $z \in \overset{\circ}{K}{}^n$.

Аналогичные неравенства справедливы для любой области Рейнхарда $\Omega \subset C^n$, характеризуемой тем, что вместе с любой точкой $(z_1,...,z_n) \in \Omega$, точка $(e^{i\theta_1}z_1,...,e^{i\theta_n}z_n) \in \Omega$, для всех действительных $\theta_1,...,\theta_n$.

Вернемся к задаче Коши $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0,t_0,x_0) = x_0$. Не ограничивая общности считаем, что t_0=0, x_0=0, и функция $f(t,x)$ - голоморфна в окрестности поликруга $K^{n+1} = \{(t,x_1...,x_n) \in C^{n+1} : |t| \le r_0, |x_j| \le r_j, j = 1,...,n\}$.

Найдем формальное решение $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x_k}{k!}t^k$ $(x_k \in C^n)$ системы $\dot{x} = f(t,x)$. Запишем систему в виде $\dot{x} = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{f_l(x)t^l}{l!}$, где $f_l(x) = \dfrac{\partial^l}{\partial t^l}(f(t,x))|_{t=0}$

или
$$\dot{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k!}t^k\right)} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\sum\limits_{\alpha}\frac{D^{\alpha}(f_k(0))}{\alpha!}\cdot\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{m!}t^m\right)^{\alpha}\right)t^l}{l!}.$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях t получаем

$x_k = \dfrac{d}{dt}\left(\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{\left(\sum\limits_{\alpha}\frac{D^{\alpha}(f_l(0))}{\alpha!}\cdot\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{m!}t^m\right)^{\alpha}\right)t^l}{l!}\right)|_{t=0}$ и рекуррентные формулы для определения x_k. В частности, x_0 = 0, x_1= f(0,0),

$$x_2 = \frac{\partial}{\partial t}(f(t,x)) + (D_x(f(t,x))\dot{x}|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(f(t,0)) + (D_x(f(0,0))x_1|_{t=0},$$

где $D_x(f(0,0))$ - матрица Якоби по переменным x в точке (0,0);

$$x_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(t,x)) + 2\frac{d}{dt}(D_x(f(t,x)))\dot{x} + 1/2D_x^2(\sum_{\alpha=2}(\dot{x})^\alpha) + (D_x(f(t,x)))\ddot{x}|_{t=0} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(t,0)) + 2\frac{d}{dt}(D_x(f(t,0)))x_1 + 1/2D_x^2(\sum_{\alpha=2}(x_1)^\alpha) + (D_x(f(0,0)))x_2$$ и т.д..

Итак, мы получили формальное решение. Для доказательства сходимости построенного ряда достаточно доказать его ограниченность. Воспользуемся техникой дифференциальных неравенств, положив $t = \rho e^{i\theta},\ \theta \in R$ получаем

$$\frac{d}{d\rho}\left\|x(\rho e^{i\theta})\right\| \le \left\|\frac{d}{d\rho}x(\rho e^{i\theta})\right\| \le \left\|f(\rho e^{i\theta},x)\right\| \le \frac{M}{(1-\frac{\rho}{r_0})(1-\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{|x_l|}{r_l}\right))}.$$

Таким образом, $\frac{d}{d\rho}\left\|x(\rho e^{i\theta})\right\| \le \left\|\frac{d}{d\rho}x(\rho e^{i\theta})\right\| \le \left\|f(\rho e^{i\theta},x)\right\| \le \frac{M}{(1-\frac{\rho}{r_0})(1-\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{|x_l|}{r_l}\right))}$.

Учитывая, что $\|x\|/\max_i(r_i) \le \left(\sum_{l=1}^{n}\frac{|x_l|}{r_l}\right) \le \|x\|/\min_i(r)_i$, имеем

$$\frac{M}{(1-\frac{\rho}{r_0})(1-\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{|x_l|}{r_l}\right))} \le \frac{M}{(1-\frac{\rho}{r_0})(1-\|x\|/\tilde{r})},\quad \text{где } \tilde{r} = \max_{1\le i\le n}(r_i).$$

Решая дифференциальное уравнение $\frac{d}{d\rho}y(\rho) = \frac{M}{(1-\frac{\rho}{r_0})(1-\frac{y(\rho)}{\tilde{r}})}$, $y(0)=0$, соответствующее полученному дифференциальному неравенству, находим

$$\left(\frac{y(\rho)}{\tilde{r}}\right)^2 - 2\frac{y(\rho)}{\tilde{r}} - 2\frac{Mr_0}{\tilde{r}}\ln(1-\frac{\rho}{r_0}) = 0.$$

Отсюда $y(\rho) = \tilde{r}\left(1-\sqrt{1+\frac{2Mr_0}{\tilde{r}}\ln(1-\frac{\rho}{r_0})}\right)$, ($y(0)=0$). Таким образом по теореме о дифференциальном неравенстве $\|x(t)\| \le \tilde{r}\left(1-\sqrt{1+\frac{2Mr_0}{\tilde{r}}\ln(1-\frac{|t|}{r_0})}\right)$.

Выражение под знаком радикала положительно при $|t| < r_0\left((1-\exp(-\frac{\tilde{r}}{2Mr_0})\right)$.

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема. Система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0,t_0,x_0) = x_0$, с голоморфной в окрестности поликруга

$$K^{n+1} = \{(t, x_1 ..., x_n) \in C^{n+1} : |t - t_0| \le r_0, |x_j - x_{j,0}| \le r_j, j = 1,...,n\}$$

правой частью $f(t,x)$ допускает единственное решение $x(t,t_0,x_0)$, аналитическое внутри круга $|t - t_0| < r_0\left((1 - \exp(-\frac{\tilde{r}}{2Mr_0})\right)$, где $\tilde{r} = \max\limits_{1 \le i \le n}(r_i)$ такое, что $x(t_0,t_0,x_0) = x_0$.

В указанном поликруге решение допускает оценку

$$\|x(t,t_0x_0)\| \le \tilde{r}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Mr_0}{\tilde{r}}\ln(1 - \frac{|t - t_0|}{r_0})}\right)$$

Требование голоморфности функции в поликруге существенно. Так, для уравнения $t^2\dot{x} = x - t$, $x(0)=0$ поиск решения в виде $x(t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m t^m$ приводит к соотношениям $x_1 = 1$, $x_2 = x_1 = 1$, $x_3 = 2x_2$,…, $x_m = (m-1)x_{m-1}$,… . Таким образом $x(t) = \sum\limits_{l=1}^{\infty}(l-1)!t^l$ и 0 - существенно особая точка. Полученный ряд расходится при любом $t \ne 0$. Для уравнения Эйлера $t\dot{x} = x - t$, $x(0)=0$ и коэффициентов найти нельзя. Действительно $x_1 = x_1 - 1$, $2x_2 = x_2$,… . Как обычно нас интересовали и будут интересовать критические случаи.

4.1.2. Римановы поверхности и аналитические множества

При рассмотрении дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, возникает необходимость рассмотрения многозначных функций. Рассмотрим понятия аналогичные римановым поверхностям над комплексной плоскостью. Здесь мы изложим основные определения и некоторые результаты, связанные с этим понятием.

Каждое комплексное многообразие размерности n посредством локальных координат локально гомеоморфно отображается в пространство C^n. Однако локальные координаты не определены глобально на многообразии, т.е. не являются на нем функциями в обычном смысле.

Мы выделим специальный класс многообразий условием существования глобально определенного непрерывного отображения в C^n, всюду локально гомеоморфного. Такие многообразия вместе с заданными на них отображениями в C^n и будут предметом нашего изучения в этом пункте.

Определение. Многообразием наложения над пространством C^n (короче: *многообразием над* C^n) мы будем называть пару (M,π), где M - многообразие, а $\pi: M \to C^n$ - локально гомеоморфное отображение, которое называется ***проектированием***. Если M связно, то (M,π) называется ***областью наложения над*** C^n.

Поликругом на (M,π) с центром в точке $P_0 \in M$ и радиусом r называется множество $\tilde{U}(P_0,r)$ точек $P \in M$, содержащее P_0, которое отображение π гомеоморфно преобразует в точки поликруга $U(z_0,r)$, где $z_0 = \pi(P_0)$ - проекция точки P_0: $\tilde{U}(P_0,r) = \{P \in M : \pi(P) \in U(z_0,r), P_0 \in \tilde{U}, \pi|_{\tilde{U}}$ гомеоморфно$\}$.

Объединение всех поликругов на (M,π)с данным центром P_0 также является поликругом, который называется ***максимальным***, радиус этого поликруга (конечный или бесконечный) называется ***расстоянием*** P_0 ***до границы*** M и обозначается через $d(P_0,\partial M)$. Под расстоянием до границы некоторого множества $N \subset M$ понимается $\inf\limits_{P\in N} d(P,N)$.

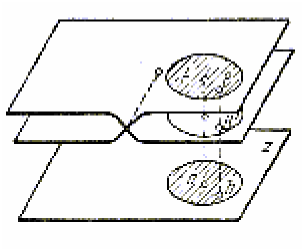
На (M,π) можно ввести понятие голоморфной функции. Именно, функция $f: M \to C$ называется ***голоморфной*** на (M,π), если для любого поликруга $\tilde{U}(P_0,r)$ на (M,π)) функция $f \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}$' голоморфна в поликруге $U(z,r) = \pi(\tilde{U})$. В частности, на (M,π), будут голоморфными все локальные координаты: $z_\nu \circ \pi(P)$, которые коротко обозначаются через $\pi_\nu(P), (\nu = 1,...,n)$.

Кольцо всех функций, голоморфных в области (M,π), над C^n мы будем обозначать через $H(M)$.

Важный пример комплексно аналитического многообразия над C^n доставляет процесс аналитического продолжения голоморфных функций. Кратко его опишем. Будем исходить из какого-либо *элемента* (U, f), т.е. совокупности поликруга $U = U(z_0 r) \subset C^n$ и голоморфной в этом поликруге функции $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} c_\alpha (z - z_0)^\alpha$. *Аналитическое продолжение вдоль пути* $\varphi: [0,1] \to C^n$ (отображение φ задается n кусочно гладкими, непрерывными комплексными функциями $z_\nu(s_1) = \varphi_\nu(s_1), (s_1 \in [0,1])$ состоит в переразложении степенного ряда в конечном числе точек на пути. Доказывается, что аналитическое продолжение вдоль пути (если оно возможно) не зависит от выбора промежуточных точек, также не меняется при замене пути гомотопным ему с теми же концами путем, если вдоль всех путей φ_s осуществляющих гомотопию, продолжение начального элемента (U, f) возможно. Приведем теперь

Определение. ***Аналитической функцией*** *n* комплексных переменных называется совокупность элементов (U_γ, f_γ), $\gamma \in A(A$ — некоторое множество индексов), каждый из которых получается из любого другого аналитическим продолжением вдоль какого-либо пути.

Построим теперь комплексно аналитическое многообразие над C^n, связанное с аналитическими функциями. Рассмотрим множество $\Re$, точками которого служат пары $A = \{a, f_a\}$, где точка $a \in C^n$ и функция $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} c_\alpha (z-a)^\alpha$ голоморфна в некотором поликруге U_a с центром в a, который для определенности будем считать поликругом сходимости ряда $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0} c_\alpha (z-a)^\alpha$. Введем в $\Re$ топологию следующим образом: под *окрестностью* U (A) точки $A \in \Re$ понимается совокупность точек B = $\{b, f_b\} \in \Re$ таких, что: 1) $d(a, b)<r$ и 2) элемент (U_b, f_b) является непосредственным аналитическим продолжением элемента (U_a, f_a). Эта топология превращает $\Re$ в хаусдорфово пространство. Действительно, если $A \neq B$, то либо $a \neq b$, либо $a=b$, но $f_a \neq f_b$. Для построения непересекающихся окрестностей $\tilde{U}(A)$ и $\tilde{U}(B)$ в первом случае достаточно выбрать непересекающиеся окрестности точек a и b на C^n, а во втором - выбрать ε столь малым, чтобы ε- окрестность точки a принадлежала поликругам сходимости обоих рядов f_a и f_b .В $\tilde{U}(A)$ включим все точки (c, f_c), для которых (U_c, f_c) является непосредственным продолжением элемента (U_a, f_a), а в $\tilde{U}(B)$ - все точки (c, f_c), где (U_c, f_c) непосредственное продолжение (U_b, f_b).(окрестности $\tilde{U}(A)$ и $\tilde{U}(B)$ не пересекаются, ибо иначе элемент (U_b, f_b) совпал бы с (U_a, f_a)).



Определим теперь *проекцию* $p:\Re \to C^n$ отображением

$$p:\{a, f_a\} \to a$$

Нетрудно видеть, что p - локальный гомеоморфизм и что это отображение определяет на $\Re$ структуру комплексно аналитического многообразия комплексной размерности n; мы будем называть $\Re$ ***римановым многообразием.*** Таким образом, пара $(\Re, p)$ является комплексно аналитическим многообразием над C^n (окрестности $U(A)$ оказываются на нем поликругами). Простой способ, бикомпактификации C^n состоит в его пополнении бесконечно удаленными точками т.е. точками $\overline{C}^n$ являются упорядоченные наборы из n комплексных чисел принадлежащих замкнутым плоскостям $\overline{C}$. Бесконечными (несобственными) точками будут те, у которых хотя бы одна координата ∞. Функциональный элемент в этом случае выбирают в виде $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\geq 0} c_\alpha \frac{(z-a)^\alpha}{z^\beta}$, где мультииндекс α соответствует конечным координатам точки a, мультииндекс β - бесконечным.

Примером голоморфной на паре $(\Re, p)$ функции является функция $f: A \to f_a(a)$, сопоставляющая точке $A = \{a, f_a\}$ свободный член ряда $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0} c_\alpha (z-a)^\alpha$.

Риманово многообразие $\Re$, очевидно, несвязно. Однако, подмножества $\Re_0$ его точек $\{a, f_a\}$ таких, что элементы (U_a, f_a) принадлежат одной аналитической функции (т.е. являются аналитическим продолжением друг друга вдоль какого-либо пути), связны. Такие множества являются областями в $\Re$ и называются ***римановыми поверхностями***. Очевидно, каждой области $\Re_0 \subset \Re$ соответствует аналитическая функция, и, обратно, каждой аналитической функции соответствует область $\Re_0 \subset \Re$.

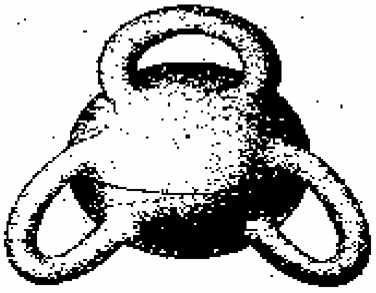
Пусть $\Re_0 \subset \Re$ какая-либо риманова поверхность; через p_0 и f_0 обозначим сужения на $\Re_0$ отображений $p:\{a, f_a\} \to a$ и $f: A \to f_a(a)$. Локально гомеоморфное отображение p_0, не обязано быть в целом гомеоморфизмом, поэтому оно может переводить в одну точку $z \in C^n$ несколько точек $A \subset \Re_0$. Функция f_0, однозначная на $(\Re_0, p_0)$, будет тогда многозначной, если ее рассматривать в зависимости от z. Таким образом, мы можем рассматривать (многозначные) аналитические функции как (однозначные) голоморфные функции, если вместо областей в C^n рассматривать области над C^n, т.е. римановы поверхности.

Так, например, для эллиптического интеграла $\int_{z_0}^{z} R(\mu, w(\mu)d\mu$, где $R(z,w)$ - рациональная функция и $w^2 = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$ (a_1, a_2, a_3 – различны). Точки a_1, a_2, a_3 являются точками ветвления и интеграл естественно рассматривать не на комплексной плоскости, а над комплексной плоскостью. В частности, может оказаться, что интеграл, взятый по замкнутому пути, имеет ненулевое значение, несмотря на то, что w однозначна на замкнутом пути и область, ограниченная этими путями, не содержат полюсов $R(z,w)$. Дело в том, что риманова поверхность для многозначной функции $\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$ гомеоморфна двумерному тору. Соответствующие петли - образующие фундаментальной группы тора. Приведем некоторые свойства римановых поверхностей:

1.Всякая риманова поверхность представляет собой ориентируемое многообразие, являющееся симплициальным комплексом.

2. Двумерные замкнутые римановы поверхности представляют собой сферы с h ручками. Известная формула Эйлера для многогранника типа сферы В-Р+Г=2, где В-количество вершин , Р- количество ребер, Г-количество граней или короче $\chi(S^2) = 2$ (эйлерова характеристика двумерной сферы равна двум) Для любого многогранника топологического типа двумерной сферы с h ручками, граница которого состоит из μ контуров, справедлива формула В-Р+Г=2(1-h)-μ. Таким образом, эйлерова характеристика двумерного тора равна нулю.

Рассмотренная конструкция римановой поверхности определяет ее вложение в четырехмерное вещественное пространство. Обычно рассматриваемое в курсах теории функций комплексного переменного понятие римановой поверхности является проекцией рассмотренной конструкции на двумерную плоскость.

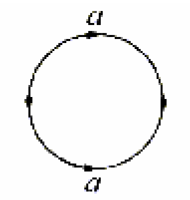


Задача. Найти фундаментальную группу сферы с h ручками.

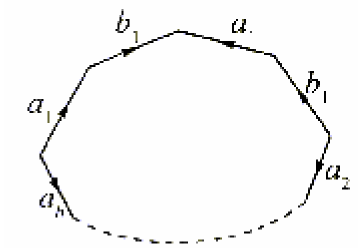
Задача. Определить топологический тип римановой поверхности функции, удовлетворяющей уравнению $w^2 = \prod_{i=1}^{m}(z-a_i)$, где a_i – различны.

Кроме двумерных, замкнутых, ориентируемых поверхностей бывают и неориентируемые, которые не могут быть римановыми поверхностями. Их можно представить себе как двумерную сферу, в которую вклеено k листов Мебиуса. Фундаментальная группа таких поверхностей суть группа с образующими $c_1, c_2, \ldots, c_k$ и единственным соотношением $c_1^2 c_2^2 \cdots c_k^2 = e$, где e – единица группы. Так, фундаментальная группа двумерной проективной плоскости (топологическая сфера с вклееным листом Мёбиуса) - это группа с одной образующей и соотношением $c^2=e$. Геометрически это означает, что двулистное накрытие проективной плоскости - это двумерная сфера, у которой фундаментальная группа тривиальна.

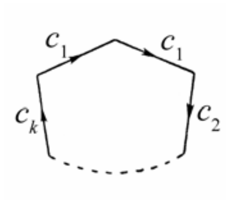
Для сферы с $h \geq 1$ ручками фундаментальная группа является группой с образующими $a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h$ и единственным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} = e$. При h=0 группа тривиальна.



Сфера без ручек



Сфера з h>0 ручками



Сфера с k листами Мёбиуса.

Соответствующие отрезки отождествлены согласно стрелкам.

В многомерном случае на римановых поверхностях рассматривают дифференциальные формы, и, соответствующие группы когомологий и характеристические классы. Для алгебраических многообразий соответствующие исследования составляют предмет алгебраической геометрии – науки, развитие которой обусловлено не только интересом к большой теореме Ферма, но и конкретными задачами дифференциальных уравнений.

Приведем теперь наиболее содержательное, из обобщений на пространственный случай, свойство голоморфных функций одного переменного обращаться в нуль, как целые степени z- a: если $f(a)$=0 (но $f \neq 0$), то в некоторой окрестности точки a $f(z) = (z-a)^k \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ голоморфна и не обращается в нуль.

Это, так называемая, подготовительная теорема (Vorbereitung-satz) Вейерштрасса.

Теорема (Вейерштрасс). Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности U точки $a \in C^n$ и $f(a)$=0, но $f('a, z_n) \neq 0$; тогда в некоторой окрестности V

$$f(z) = \{(z_n - a_n)^k + c_1('z)(z_n - a_n)^{k-1} + ... + c_k('z)\}\varphi(z),$$

где $k \geq 1$ - порядок нуля $f('a, z_n)$ в точке $z_n = a_n$, функции c_v голоморфны, в $'V$, $c_v('a)$ =0, а φ голоморфна в V и не обращается там в нуль.

Здесь и далее $'z \in U$ означает проекцию $z \in C^n$ и $U \subseteq C^n$ в пространство $C^{n-1}(z_1, ..., z_{n-1})$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что a = 0. По теореме единственности для функций одного переменного можно выбрать r_n>0 так, чтобы $f('0, z_n) \neq 0$ при $0 < |z_n| \leq r_n$, а в силу непрерывности f найдется поликруг $V = U('0, r)$ такой, что $f \neq 0$ при $'z \in V$, $|z_n| = r_n$. Для любого фиксированного $'z_0 \in V$ число нулей функции $f('z_0, z_n)$ в круге $V_n = \{|z_n| < r_n\}$ равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V_n} \frac{\frac{\partial}{\partial z_n} f('z_0, z_n)}{f('z_0, z_n)} dz_n = k,$$ так как функция целочисленна и голоморфно зависит от параметра $'z_0 \in V$, то она постоянная и при $'z_0 = '0$ равна порядку нуля функции $f('0, z_n)$ в точке z_n=0, т.е. k.

Фиксируем $'z \in V$, обозначим через $z_n^{(\nu)} = z_n^{(\nu)}(z')$, $\nu = 1, ..., k$ нули функции $f('z, z_n)$ в круге V_n и построим многочлен относительно z_n

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{k}(z_n - z_n^{(\nu)}) = z_n^k + c_1('z)z_n^{k-1} + ... + c_k('z),$$

имеющий эти нули своими корнями. Его коэффициенты голоморфны в V. В самом деле, для любой голоморфной в $\overline{V_n}$ функции $\omega(z_n)$ по принципу аргумента

$$\sum_{\nu=1}^{k} \omega(z_n^{(\nu)}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V_n} \omega(z_n) \frac{\frac{\partial}{\partial z_n} f('z, z_n)}{f('z, z_n)} dz_n,$$

откуда видно, что суммы в левой части - голоморфные функции переменного $'z \in V$ (мы учитываем, что $f \neq 0$ при $'z \in V$ и $z_n \in \partial V_n$). Полагая $\omega(z_n) = z_n^{\mu}$, $\mu = 1, ..., k$, найдем, что суммы (μ-х степеней корней многочлена голоморфны в V, а через эти суммы (как известно из алгебры) рационально выражаются его коэффициенты, следовательно, $c_\nu('z)$.

При $'z = '0$ все k корней многочлена равны нулю, поэтому и все

$c_\nu(`0)=0$. Функция $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{P(z)}$ при любом фиксированном $`z\in V$ является голоморфной функцией z_n в круге V_n и не обращается в нуль, ибо P обращается в нуль того же порядка лишь в точках $z_n^{(\nu)}(z')$, в которых и f=0. При фиксированном $`z\in V$ и $z_n\in V_n$ имеем

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V_n}\frac{f(`z,\xi_n)}{P(`z,\xi_n)}\frac{d\xi_n}{(\xi_n-z_n)},$$

а так как $P\neq 0$ на ∂V_n(ибо там $f\neq 0$), то $\varphi(z)$, голоморфно зависит от $`z\in V$ в связи с голоморфной зависимостью интеграла от параметра. Так как $\varphi(z)$ голоморфно зависит от $`z\in V$ и $z_n\in V_n$, то по теореме Хартогса $\varphi(z)$ голоморфна в поликруге $V=V\times V_n$. Теорема доказана.

Подготовительная теорема Вейерштрасса показывает, что голоморфная функция обращается в нуль, как многочлен относительно переменного z_n с коэффициентами из кольца $H(`a)$ функций от $`z$, голоморфных в точке $`a$. Точнее, все коэффициенты, кроме старшего, принадлежат идеалу, который образуют в $H(`a)$ функции, обращающиеся в нуль в этой точке. Таким образом, эта теорема позволяет привлекать для исследования множества нулей голоморфных функций алгебраические методы.

Определение. Назовем $M\subset C^n$ ***аналитическим множеством*** *в точке* $a\in M$, если в некоторой окрестности U этой точки его можно представить как множество общих нулей конечного числа голоморфных в U функций f_ν,:

$$M=\{z\in U: f_\nu(z)=0, \nu=1,...,N\}.$$

Мы будем называть M ***аналитическим множеством***, если оно является аналитическим в каждой своей точке.

Понятие аналитического множества не совпадает с понятием аналитического многообразия: например, множество $\{z_1 z_2 = 0\}$ в C^2 в окрестности точки (0, 0) не гомеоморфно шару. В этом примере множество распадается на два отдельных аналитических множества $\{z_1 = 0\}$ и $\{z_2 = 0\}$, которые уже являются многообразиями. В ряде вопросов важно исключить подобные распадения. Для этого вводится следующее определение.

Определение. Аналитическое в точке a множество M называется ***неприводимым*** в этой точке, если ни в какой окрестности a его нельзя представить в виде объединения $M_1\cup M_2$, где M_1 и M_2 - непустые и отличные от M аналитические в точке a множества. Множество M называется ***локально неприводимым*** в точке a, если оно неприводимо в каждой своей точке из некоторой окрестности a.

Примеры. Аналитическое множество $\{z_3^2 - z_1^2 z_2^2 = 0\}$ приводимо в начале координат C^3, ибо оно разбивается на два аналитических множества

$\{z_3 - z_1 z_2 = 0\}$ и $\{z_3 + z_1 z_2 = 0\}$. Множество $\{z_3^2 - z_1^2 z_2 = 0\}$ неприводимо в нуле, но не является локально неприводимым в этой точке, ибо оно приводимо в точках $a_1 = a_3 = 0,\ a_2 \neq 0$ (оно представляется в виде объединения множеств $\{z_3 \pm z_1\sqrt{z_2} = 0\}$, где $\sqrt{z_2}$ обозначает одну из двух голоморфных в точке $(0, a_2, 0)$ ветвей корня). Множество $\{z_3^2 - z_1 z_2 = 0\}$ локально неприводимо в начале (конечно, и в других точках тоже).

Понятие неприводимости аналитических множеств связано с понятием неприводимости функций. Голоморфная в $a \in C^n$ функция f называется ***неприводимой*** в точке a, если ее нельзя представить в виде произведения двух функций, голоморфных в a, каждая из которых равна нулю в этой точке.

Отметим простое утверждение, относящуюся к разложению функций на неприводимые множители.

Утверждение. Любую функцию f, голоморфную в точке a и равную там нулю, можно разложить в произведение неприводимых голоморфных в a функций, причем такое разложение единственно с точностью до множителей, отличных от нуля в точке a.

Дейсвительно, подготовительная теорема Вейерштрасса сводит задачу к разложению многочленов по одной из переменных, а любой многочлен, как известно из алгебры, можно единственным способом (с точностью до делителя единицы) представить в виде произведения неприводимых многочленов. Для этого достаточно воспользоваться алгоритмом Евклида нахождения наибольшего общего делителя.

Следствие. Любое аналитическое в точке a множество можно представить как конечное объединение неприводимых этой точке аналитических множеств.

Объединяя одинаковые множители в разложении голоморфной в точке a функции f, согласно утверждения, мы получим однозначно определяемое (с точностью до множителей, отличных от нуля в a) представление

$$f = f_1^{n_1} \cdots f_m^{n_m},$$

где f_ν голоморфны и неприводимы в точке a, $f_\mu \neq f_\nu$ при $\mu \neq \nu$ и n_ν - положительные целые числа. Каждое множество M_ν, которое в окрестности a задается уравнением $f_\nu = 0$, неприводимо в точке a, и f_ν является для него определяющей функцией.

Воспользуемся разложением $f = f_1^{n_1} \cdots f_m^{n_m}$, чтобы сформулировать определение.

Определение . Пусть f - голоморфная в точке a функция и $f(a) = 0$. Число n_ν (ν=1,…,m) в приведенном разложении называется ***порядком нулевого множества*** { f_ν = 0} функции f в точке a.

Если f в окрестности точки a представима в виде $f = \dfrac{\varphi}{\psi}$, где φ и ψ голоморфны в a, не имеют общих множителей, голоморфных и равных нулю в a, и $\psi(a) = 0$; числа p_ν, аналогичным образом определяемые для функций ψ, называются ***порядками полярных множеств*** { ψ = 0} функции f в точке a.

Перейдем к описанию простейших аналитических множеств комплексной размерности n - 1, которые задаются в области $U \subset C^n$ при помощи одной голоморфной функции $M = \{z \in U : f(z) = 0\}$.

Предполагается, что f не равно тождественно нулю.

В связи с неравноправностью переменных, участвующих в рассматриваемых далее дифференциальных уравнениях, предполагается, что $\dfrac{\partial f}{\partial z_n}$ не равен тождественно нулю на каждой неприводимой компоненте множества M.

Будем различать два типа точек таких множеств.

а) Обыкновенные точки. Точка a аналитического множества M называется ***обыкновенной***, если в ней $\dfrac{\partial f}{\partial z_n} \neq 0$.

По теореме существования неявных функций, уравнение M, которое записывается в виде $f(\grave{z}, z_n) = 0$, в достаточно малой окрестности $\grave{U}$ точки $\grave{a} \in C^{n-1}$' можно переписать в виде, разрешенном относительно z_n:

$$z_n = g(\grave{z}),$$

где g - голоморфная в $\grave{U}$ функция. Отсюда видно, что в окрестности обыкновенной точки a множество M является аналитическим многообразием комплексной размерности n-1. За локальный параметр можно принять переменную $y = \grave{z}$, а за область его изменения - окрестность в U (отображение $U \to M$, определяемое $g(\grave{z}) = g(y)$, голоморфно, и различным точкам U соответствуют точки $(\grave{z}, z_n) \in M$, различные просто потому, что их проекции $\grave{z}$ различны).

Аналитическое множество локально неприводимо в каждой своей обыкновенной точке - это видно из представимости уравнением $z_n = g(\grave{z})$.

б) Критические точки, т.е. точки для которых $\frac{\partial f}{\partial z_n}|_{z=a} = 0$. Мы рассмотрим здесь лишь случай, для которого выполнены условия подготовительной теоремы Вейерштрасса. Для дифференциальных уравнений возможны и иные ситуации, но о них далее.

Подготовительная теорема Вейерштрасса позволяет записать уравнение M в окрестности точки a в виде

$$P(z_n) = (z_n - a_n)^k + c_1(\grave{z})(z_n - a_n)^{k-1} + ... + c_k(\grave{z}) = 0,$$

где функции c_v голоморфны в окрестности U точки $\grave{a} \in C^{n-1}$, $c_v('a) = 0$, и $k \geq 2$, ибо при $k=1$ точка a была бы , очевидно, обыкновенной.

Уравнение $P(z_n) = 0$ имеет k корней

$$z_{n,\mu} = g_\mu(\grave{z}),\ \mu = 1,...,k,$$

причем функции $g_\mu(\grave{z})$ не только непрерывны, но голоморфны в U всюду, кроме точек множества $\grave{\Delta}$, в которых это уравнение имеет хотя бы один кратный корень. Множество $\grave{\Delta}$ называется ***дискриминантным*** и, как известно из алгебры, определяется уравнением

$$\mathrm{R}(P(z_n), \frac{\partial}{\partial z_n} P(z_n)) = 0,$$

где $\mathrm{R}(P(z_n), \frac{\partial}{\partial z_n} P(z_n))$ - результант многочленов $P(z_n)$ и его производной $\frac{\partial}{\partial z_n} P(z_n)$. Напомним , что результантом многочленов $P(\xi) = a_0\xi^k + a_1\xi^{k-1} + ... + a_{k-1}\xi + a_k$ и $Q(\xi) = b_0\xi^l + b_1\xi^{l-1} + ... + b_{l-1}\xi + b_l$, где $\xi \in C$ называется определитель $(k+l)$ –го порядка, в котором коэффициенты a_i занимают l строк, а коэффициенты b_j занимают k строк, имеющий вид

$$\mathrm{R}(P,Q)=\det\left(\begin{array}{ccc:ccc:cc} a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-1} & a_k & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{l-1} & b_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_{l-2} & b_{l-1} & b_l & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_{l-1} & b_l \end{array}\right).$$

Если $a_0 b_0 \neq 0$, то $\mathrm{R}(P,Q)=0$ в том и только том случае, если P и Q имеют хотя бы один общий корень. Таким образом, если $\mathrm{R}(P(z_n),\dfrac{\partial}{\partial z_n}P(z_n))=0$, то $P(z_n)$ имеет кратный корень. Результант представляет собой функцию, голоморфную в $'U$ (и не равную тождественно нулю). Следовательно, дискриминантное множество $\grave{\Delta}$ является аналитическим множеством (комплексной размерности n - 2) в пространстве C^{n-1}.

Легко видеть, что дискриминантное множество содержит проекцию в пространство $C^{n-1}(\grave{z})$ совокупности критических точек множества M.

Действительно, в достаточно малой окрестности любой точки $\grave{b} \in \grave{U} \mid \grave{\Delta}'$ множество M задается уравнениями

$$z_{n,\mu}=g_{\mu}(\grave{z}),$$

где g_{μ} - голоморфные в этой окрестности функции, поэтому каждая из k точек $b_{\mu}=(\grave{b},g_{\mu}(\grave{b}))\in M$, проектирующихся в $\grave{b}$, является правильной точкой M.

Отсюда следует, что совокупность критических точек образует на M множество комплексной размерности не выше n - 2, т.е. что действительная размерность этого множества, по меньшей мере, на 2 единицы ниже действительной размерности M (которая равна $2n$ —2). В частности, можно показать, что совокупность критических точек множества M не разбивает этого множества (так что если M неприводимо, то после удаления критических точек оно останется связным).

Таким образом, критических точек на аналитическом множестве сравнительно мало, и основную массу его точек составляют правильные точки. В окрестности правильных точек аналитические множества устроены как комплексные (n-1) - мерные плоскости, а в критических точках ветвится несколько таких плоскостей.

4.1.3. Классификация особых точек

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$F(t,x,\dot{x},\ddot{x},...,x^{(n)})=0, \qquad (*)$$

где $t\in C,\ x(t)\in C,\ \dot{x}=\dfrac{dx}{dt},\ \ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \ldots,x^{(n)}=\dfrac{d^nx}{dt^n}$, функция

$F(t,x,\dot{x},\ddot{x},...,x^{(n)}):C^{n+2}\to C$ - неприводимая голоморфная функция своих аргументов.

В этом пункте мы рассмотрим возможные типы особенностей для некоторых классов уравнений вида (*).

Введем обозначения $p^0=x,\ p^1=\dot{x},\ p^2=\ddot{x},\ldots,p^n=x^{(n)}$,

$F(t,p)=F(t,p^0,p^1,...,p^n)$. Здесь , как и раннее `$p$ обозначает

`$p=(p^0,p^1,...,p^{n-1})$. Не ограничивая общности будем считать, что при рассмотрении задачи Коши t_0 =0.

Определение. Точка $(t_0,p_0)=(t_0,p_0^0,p_0^1,...,p_0^n)$, ($F(t_0, p_0)$=0) называется ***обыкновенной*** для уравнения $F(t,p)=0$, если в ней $\dfrac{\partial F(t,p)}{\partial p^n}\neq 0$.

По теореме существования неявных функций в достаточно малой окрестности U точки $(t_0,`p_0)\in C^{n+1}$ уравнение $F(t, p)$=0 можно переписать в виде, разрешенном относительно $p^n$: $p^n=g(t,`p)$, где g- голоморфная в U функция. К полученному дифференциальному уравнению при стандартной замене его на систему, применим метод мажорант. Отсюда видно, что в окрестности обыкновенной точки задача Коши имеет единственное решение, которое, используя аналитическое продолжение вдоль пути, можно продолжить на связную компоненты точки $(t_0,`p_0)\in C^{n+1}$.

Определение. Точка (t_0,p_0) ($F(t_0, p_0)$=0) называется критической точкой типа Вейерштрасса порядка k, если в некоторой окрестности этой точки уравнение может быть представлено в виде

$$P((t,p))=(p^n-p_0^n)^k+c_1((t,`p))(p^n-p_0^n)^{k-1}+...+c_k((t,`p))=0$$

при $k\geq 2$, ибо при k=1 точка (t_0,p_0) была бы , очевидно, обыкновенной

В окрестности такой точки в случае простых корней многочлена уравнение может быть записано в виде

$$p_\mu^n=g_\mu((t,`p)),\ \mu=1,...,k,$$

причем функции $g_\mu(t,\grave{}p)$ голоморфны в U. Решения ветвятся в окрестности точки (t_0,p_0). Точка ветвления ***алгебраическая***, если риманова поверхность конечнолистна, в противном случае точка ветвления трансцендентна. Для функции $\ln(t)$ точка 0 – трансцендентная точка ветвления. Отметим, что переменные p^i ($p^i=\frac{d^i}{dt^i}(x(t))$, i=1,…,n неравноправны, в отличие от переменных t и p^0.

Определение. Точка (t_0,p_0), ($F(t_0, p_0)=0$) называется t- критической точкой типа Вейерштрасса порядка k, если в некоторой окрестности этой точки уравнение может быть представлено в виде

$$(t^n-t_0^n)^k+c_1((p^0,t^0,t^1,...,t^{n-1}))(t^n-t_0^n)^{k-1}+...+c_k((p^0,t^0,t^1,...,t^{n-1}))=0,$$

где $t^\mu=\frac{d^\mu t(p^0)}{(dp^0)^\mu}, \mu=0,1,...,n$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x}=f(t,x),\ x\in C,$$

где $f(t,x)$ такова, что в окрестности точки (t_0,x_0) имеет место

$$\frac{1}{f(t,x)}=a_0(t)+a_1(t)(x-x_0)+a_2(t)(x-x_0)^2+....$$

Для определенности примем, что $a_0(t_0)=a_1(t_0)=...a_{k-1}(t_0)=0$ и $a_k(t_0)\neq 0$, т.е. (t_0,x_0) - полюс порядка k для функции $f(t,x)$ по переменной x. Дифференциальное уравнение может быть записано в виде $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{f(t,x)}$, единственное решение которого, может быть получено методом мажорант, поскольку

$$\frac{dt}{dx}|_{(t_0,x_0)}=\frac{d^2t}{dx^2}|_{(t_0,x_0)}=...=\frac{d^kt}{dx^k}|_{(t_0,x_0)}=0, \text{ а } \frac{d^{k+1}t}{dx^{k+1}}|_{(t_0,x_0)}\neq 0.$$

Это решение имеет вид $t-t_0=(x-x_0)^{k+1}(c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+...)$, где $c_0\neq 0$.

Отсюда следует, что функция x-x_0 может быть представлена в виде $x-x_0=P_1\{(t-t_0)^{1/(k+1)}\}$, где P_1 - степенной ряд, главный член которого первой степени относительно аргумента. Следовательно, t_0 - точка ветвления.

В частности, пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{x}=\frac{g(t,x)}{h(t,x)},$$

где $g(t, x)$ и $h(t, x)$ - полиномы от x, коэффициенты которых аналитические функции t. Пусть степень $h(t, x)$ равна n, а t_0 таково, что уравнения $g(t_0, x) = 0$ и $h(t_0, x)=0$ не имеют общего корня, тогда t_0 соответствует n значений x_0, так что для каждой из этих начальных пар значений (t_0, x_0) соответствует последовательность решений с точкой ветвления в t_0.

Если мы предположим, что точка t_0 описывает кривую в плоскости t так, что ни для одной точки z_0 на этой кривой уравнения $g(t_0, x) = 0$ и $h(t_0, x)=0$ не имеют общего корня, то точка на такой кривой является точкой разветвления семейства решений. Точки ветвления могут рассматриваться как подвижные особенности. С другой стороны, любые другие особенности и, в частности, любые существенные особенности возникают вследствие того, что коэффициенты полиномов $g(t, x)$ и $h(t, x)$ перестают быть аналитическими. Поскольку это происходит совершенно независимо от x_0 такие особенности являются неподвижными относительно их положения в плоскости t.

Все типы особенностей решений: полюса, существенно особые точки реализуются в уравнении (*). Напомним, что в любой окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает любое значение, кроме может быть одного, бесконечное число раз.

Все до сих пор рассмотренные типы особых точек определялись уравнением (*). Это характерно для линейных уравнений. Действительно, для уравнения вида $\dot{x} = A(t)x$ особенности решений определяются лишь особенностями линейного оператора $A(t)$.

Однако, ситуация с нелинейными уравнениями несколько иная.

Определение. Особая (не обыкновенная) точка уравнения (*) называется неподвижной, если она может быть определена исследованием уравнения $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n)}) = 0$ и не зависит от начальных условий.

Определение. Особая точка уравнения (*) называется подвижной, если ее месторасположение зависит от начальных условий.

Например, уравнение $\dot{x} = -x^2$, $x(0)=x_0$ имеет решение $x(t) = \dfrac{x_0}{x_0 t + 1}$ с подвижным простым полюсом . Уравнение $2\dot{x} = -x^3$, $x(0)=x_0$ имеет решение $x(t) = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 t + 1}}$ с подвижным критическим полюсом $t = -1/x_0^2$.

Уравнение $\dot{x} = e^{-x}$, $x(0)=x_0$ имеет решение $x = \ln(t + e^{x_0})$ с подвижной трансцендентной особой точкой $t = -e^{x_0}$, а уравнение $\dot{x} = (\arccos x)^2 \sqrt{1 - x^2}$, $x(0)=x_0$ имеет решение $x = \cos\dfrac{\arccos(x_0)}{t \cdot \arccos(x_0) - 1}$ с существенно особыми подвижными точками. Однако, входящие в правую часть последних двух примеров функции содержат x трансцендентно. Далее мы покажем, следуя Пенлеве, что уравнения первого порядка алгебраические относительно неизвестной функции и ее производной не могут содержать подвижных существенно особых точек.

Уравнение второго порядка $\ddot{x} = (\dot{x})^2 \dfrac{2x-1}{1+x^2}$ имеет интеграл $x = \mathrm{tg}(\ln(C_1 t + C_2))$, для которого особая точка $t = -C_2 / C_1$ существенно особая.

4.1.4. Уравнение Риккати

Итак, особенности решений уравнения

$$\dot{x} = f(t,x) = \frac{g(t,x)}{h(t,x)}, \qquad x \in C^1$$

разделяются на две категории:

(a) фиксированные особые точки, т.е. точки в плоскости t, расположение которых не зависит от начальных значений;

(b) подвижные особые точки, которые зависят от начальных значений и перемещаются в плоскости t при их изменении. Подвижные особенности могут быть полюсами или точками ветвления.

Здесь возникает вопрос, какие ограничения должны быть наложены на дробно рациональную функцию $f(t, x)$, если решения с подвижными точками ветвления невозможны. Пусть t_0 будет любой точкой на плоскости t, не являющейся одной из фиксированных особых точек. Тогда *необходимо*, чтобы не было значения x для которого уравнение $h(t_0, x)=0$ было бы удовлетворено. Но это уравнение всегда имеет корни, если только $h(t_0, x)$ не зависит от x. Поскольку t_0 - любая не особая точка в плоскости t, то отсюда следует, что $h(t, x)$ функция только t. Иначе говоря, $f(t,x) = \sum_{i=0}^{m} p_i(t) x^i$. Аналогично, совершая замену $x = y^{-1}$, получим уравнение в виде

$$\dot{y} = -y^2 p_0(t) - p_1(t) y - p_2(t) - p_3(t) y^{-1} - \ldots - p_m(t) y^{2-m},$$

которое должно быть полиномом от y, следовательно необходимо, чтобы

$$p_3(t) = p_4(t) = ... = p_m(t) \equiv 0.$$

При отсутствии подвижных точек ветвления дифференциальное уравнение получится вида $\dot{x} = p_0(t) + p_1(t)x + p_2(t)x^2$.

Полученное таким образом уравнение называется ***уравнением Риккати***; если $p_2(t)$ тождественно равно нулю, оно приводится к линейному уравнению.

Отсутствие подвижных точек ветвления уравнения приводит к важному заключению в отношении формы общего решения. Пусть t_1 и t_2 будут двумя точками в области U, они могут быть соединены при помощи простой кривой, не проходящей через какую-либо точку ветвления. Пусть x_1 - начальное значение зависимой переменной, выбранное соответственно t_1, и пусть x_2 будет значением, соответствующему полученному аналитическим продолжением через конечное число кругов, которые полностью накрывают путь t_1t_2 . При продолжении решение и его обратная величина остаются аналитическими функциями x_1, конечное значение x_2 является также аналитической функцией x_1. Независимо от значения (конечного или бесконечного), какое может иметь x_1, x_2 определяется единственным способом, так как в области U отсутствуют точки ветвления. Таким образом x_2 рассматриваемая как функция x_1 - однозначна, аналитическая и не имеет никаких других особенностей, кроме полюсов, следовательно она является рациональной функцией x_1.

Если рассматривать x_2, как произвольное начальное значение, а x_1 - как значение, полученное из него аналитическим продолжением, то процесс обратимый, следовательно x_1 - рациональная функция от x_2. Эта рациональная зависимость между x_1 и x_2 может иметь место только в том случае, если x_2 дробно-линейная функция x_1, т.е. $x_2 = \dfrac{a(t)x_1 + b(t)}{c(t)x_1 + d(t)}$.

Из свойств ангармонического соотношения следует, что если $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ - любые три частные решения уравнения Риккати, то общее решение может быть записано в виде $\dfrac{x(t) - x_1(t)}{x(t) - x_2(t)} = A\dfrac{x_3(t) - x_1(t)}{x_3(t) - x_2(t)}$, где A — постоянная.

Уравнение Риккати может быть приведено к линейному уравнению второго порядка**.** Если $p_2(t)$ тождественно равно нулю, то уравнение Риккати вырождается в линейное уравнение первого порядка. Этот случай мы рассматривать не будем. Положим $x(t) = -\dfrac{\dot{y}}{p_2(t)y}$

уравнение Риккати примет вид

$$-\frac{\ddot{y}}{p_2 y}+\frac{1}{p_2}\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2+\frac{\dot{p}_2}{(p_2)^2}\cdot\frac{\dot{y}}{y}=p_0-\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{\dot{y}}{y}+p_2\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2$$

и будет приведено к однородному линейному уравнению второго порядка

$$p_2(t)\ddot{y}-(\dot{p}_2(t)+p_1(t)p_2(t))\dot{y}+p_0(t)p_2^2(t)y=0.$$

С другой стороны, линейное уравнение второго порядка

$$\ddot{y}+P_1(t)\dot{y}+P_0(t)y=0$$

преобразуется заменой $x=\dot{y}/y$ в уравнение Риккати

$$\dot{x}=-P_0(t)-P_1(t)x-x^2.$$

Следовательно теория уравнения Риккати эквивалентна теории однородного линейного уравнения второго порядка.

Общее решение линейного уравнения имеет вид

$$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t),$$

поэтому общее решение уравнения Риккати будет иметь вид

$$x(t)=\frac{C_1\dot{y}_1(t)+C_2\dot{y}_2(t)}{p_2(t)\big(C_1y_1(t)+C_2y_2(t)\big)}.$$

Таким образом, критическими особыми точками решения уравнения Риккати могут быть критические точки трех его частных решений.

Задача. Докажите, что все подвижные особенности уравнения Риккати являются полюсами.

§ 2. Уравнения первого порядка не первой степени

4.2.1. Условия Фукса

В этом пункте мы рассмотрим уравнения первого порядка, производная в которых не определяется через *x* и *t*, но она неявно связана соотношением $F(t,x,\dot{x})=0$. Из этого общего класса уравнений мы рассмотрим только те уравнения, в которых левый член является полиномом от x и $\dot{x}$. Пусть $\dot{x}\equiv p$, тогда функцию $F(t, x, p)$ можно представить в виде

$$P(t,x,p)=a_0(t,x)p^m+a_1(t,x)p^{m-1}+...+a_{m-1}(t,x)p+a_m(t,x)=0, \qquad (*)$$

в котором функции $a_i(t, x)$ будут полиномами от *x*, с аналитическими коэффициентами по *t*. Предположим далее, что указанное выражение неприводимо, т.е., что оно не может быть разложено на множители того же аналитического характера. В этом пункте определим необходимые условия, а в следующем докажем достаточность полученных условий отсутствия подвижных точек ве-

ветвления и получим, таким образом, обобщение уравнения Риккати. Пусть $\Delta = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \mathrm{R}(P(t,x,p), \frac{\partial P(t,x,p)}{\partial p})$ будет p - дискриминантом $P(t,x,p)$ и полиномом от x, коэффициенты которого являются аналитическими функциями t. В последующем разборе мы исключим некоторые значения t,
для которых:

(a) $\Delta(t,x) = 0$ независимо от x;

(b) $a_i(t, x)=0$ независимо от x;

(c) коэффициенты a_i имеют особые точки для общих значений x;

(d) корни $\Delta(t,x) = 0$, рассматриваемые как уравнения относительно x, имеют особые точки.

Все эти значения t фиксированы и зависят только от коэффициентов a_i; они соответствуют особым точкам, фиксированным в плоскости t. Здесь и далее мы будем рассматривать t_0 как начальное значение t, отличное от одного из перечисленных особых значений, а x_0 будет соответствующим начальным значением x; нам нужно рассмотреть четыре независимых случая

(I) $\Delta(t_0,x_0) \neq 0$, $a_0(t_0,x_0) \neq 0$;

(II) $\Delta(t_0,x_0) \neq 0$, $a_0(t_0,x_0) = 0$;

(III) $\Delta(t_0,x_0) = 0$, $a_0(t_0,x_0) \neq 0$;

(IV) $\Delta(t_0,x_0) = 0$, $a_0(t_0,x_0) = 0$.

Случай (I). Если $\Delta(t_0,x_0) \neq 0$ и $a_0(t_0,x_0) \neq 0$, то в окрестности $t = t_0$, $x = x_0$ уравнение $P(t,x,p) = 0$ может быть записано в виде

$$p_\mu = g_\mu((t,x)),\ \mu = 1,...,m,$$

причем функции $g_\mu(t,x)$ голоморфны. Следовательно, уравнение $P(t,x,p) = 0$ имеет m независимых, аналитических решений, удовлетворяющих начальным условиям (t_0,x_0). Других решений оно не имеет.

Случай (II). Если $a_0(t_0,x_0) = 0$; но $\Delta(t_0,x_0) \neq 0$, то уравнение (*) определяет m значений p, одно из которых становится бесконечным при (t_0, x_0). Не может быть двух значений p, обращающихся одновременно в бесконечность, так как это привело бы к $a_1(t_0, x_0)=0$ и $\Delta(t_0,x_0) = 0$. Следовательно, для p имеются m- 1 независимых выражений, аналитических в окрестности (t_0, x_0), а они приводят к последовательности m - 1 решений уравнения,

$$p_\mu = g_\mu((t,x)),\ \mu = 2,...,m,$$

удовлетворяющих начальным условиям.

Чтобы исследовать корень, который становится бесконечным в (t_0, x_0), положим $q = \dfrac{dt}{dx} = 1/p$. В этом случае уравнение $P(t, x, 1/q) = 0$ имеет корень $g_1(t - t_0, x - x_0)$, обращающийся в нуль при (t_0, x_0) и голоморфный в окрестности (t_0, x_0). Дифференциальное уравнение $q = g_1(t - t_0, x - x_0)$ имеет решение $t = t_0 + Q_r(x - x_0)$, где $r \geq 2$ поскольку $\dfrac{dt}{dx} = 0$ при $t = t_0$. Решение (*), соответствующее значению p и обращающееся в бесконечность для (t_0, x_0), получится, таким образом, вида $x - x_0 = \mathrm{P}_1\{(t - t_0)^{-1/r}\}$.

Следовательно, случай (II) всегда приводит к решению, имеющему ветвление в t_0, т.е. *подвижную* точку ветвления. Это приводит к первому необходимому условию для отсутствия подвижных точек ветвления.

Уравнение $a_0(t, x) = 0$ *не имеет решения* $x = \zeta(t)$ *такого, что* $\Delta(t, \zeta(t)) \neq 0$.

Случай (III) Левая часть алгебраического уравнения $\Delta(t, x) = 0$ является полиномом от x с коэффициентами, аналитическими относительно t. Пусть $x = \eta(t)$ удовлетворяет этому алгебраическому уравнению, тогда $\eta(t)$ не будет аналитической функцией в особых точках $\Delta(t, x)$, а также возможно и в некоторых других точках. Исключим эти точки, которые являются изолированными, из последующего рассмотрения.

Уравнение $P(t, \eta(t), p) = 0$ имеет не меньше одного кратного корня p, скажем $p = \tilde{\omega}$ кратности $\lambda > 1$. С другой стороны, для общих значений x уравнение $P(t, x, p) = 0$ имеет m корней. Пусть корни, которые равны друг другу и $\tilde{\omega}$ при $x = \eta(t)$ будут $p_1, p_2, ..., p_\lambda$.

Предположим, что t фиксировано; пусть x опишет небольшой круг вокруг точки η, соответствующей выбранному значению t.

По завершении обхода круга p_1 возвращается к своему начальному значению или к одному из значений $p_2, ..., p_\lambda$. После того, как были описаны $\alpha \leq \lambda$ полных контура, p_1 принимает начальное значение. Пусть последовательность значений, принятых p_1 в течение этого процесса, будет $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha, p_1$; в этом случае говорят, что эта последовательность образует ***цикл*** порядка α.

Если p_1, рассматриваемая как функция x, имеет точку ветвления порядка

α -1 при $x = \eta$, то положим $x(t)-\eta = y^{\alpha}$ и тогда p_1 становится однозначной функцией y. Но $p_1 = \tilde{\omega}$, когда $x=\eta$, и ограничено, когда x находится в окрестности η. Следовательно p_1 может быть разложено в ряд Тейлора

$p_1 = \tilde{\omega} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r y^r}{r!}$, коэффициенты которого зависят от t и который сходится, когда t принимает не особые значения, а y достаточно мало. Пусть c_k будет первым из коэффициентов, который не обращается тождественно в нуль; тогда

$p_1 = \tilde{\omega} + \sum_{r=k}^{\infty} \frac{c_r}{r!}\{(x-\eta(t)\}^{r/\alpha}$, следовательно, $x-\eta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{d\{x-\eta(t)\}}{dt} = \tilde{\omega} - \frac{d\eta(t)}{dt} + \sum_{r=k}^{\infty} \frac{c_r}{r!}\{(x-\eta(t)\}^{r/\alpha}$.

В частном случае $\alpha = 1$, когда правая часть уравнения аналитическая (за исключением изолированных точек) относительно t и $x-\eta(t)$, уравнение имеет аналитическое решение. Однако, если $\alpha > 1$, то правая часть не однозначна и имеет *ветвящееся* значение. Рассмотрим сначала случай, когда $\tilde{\omega} \neq \frac{d\eta}{dt}$ тождественно. Изолированные значения t, для которых $\tilde{\omega} = \frac{d\eta}{dt}$ исключаются. Пусть

$$\tilde{\omega} - \frac{d\eta}{dt} = b_0 + b_1(t-t_0) + \frac{b_2}{2}(t-t_0)^2 + \ldots \quad (b_0 \neq 0),$$

$$c_r = c_r^{(0)} + c_r^{(1)}(t-t_0) + \frac{c_r^{(2)}}{2}(t-t_0)^2 + \ldots \qquad (r \geq k),$$

тогда, если $x(t)-\eta = y^{\alpha}, (\alpha \geq 2)$, то

$$\alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dt} = \sum_j \frac{b_j}{j!}(t-t_0)^j + \sum_{r=k}^{\infty} \frac{y^r}{r!}\left(\sum_i \frac{c_r^{(i)}(t-t_0)^i}{i!}\right);$$

правая часть этого уравнения аналитическая для достаточно малых значений t - t_0 и y, следовательно $\frac{dt}{dy} = \frac{\alpha}{b_0} y^{\alpha-1} +$ высшие члены,

а это уравнение имеет единственное аналитическое решение вида
$t - t_0 = P_{\alpha}(y)$.

Обращая это уравнение, получим $y = P_1\{(t-t_0)^{1/\alpha}\}$, а первоначальное уравнение будет иметь решение

$$x(t) = \eta(t) + P_1\{(t-t_0)^{1/\alpha}\}^{\alpha} = \eta(t) + P_{\alpha}\{(t-t_0)^{1/\alpha}\} =$$

$$=\eta(t)+(t-t_0)\{\gamma_0+\gamma_1(t-t_0)^{1/\alpha}+\frac{\gamma_2}{2}(t-t_0)^{2/\alpha}+...\}.$$

Следовательно, подвижная точка ветвления появляется, когда уравнение $\tilde{\omega}=\frac{d\eta}{dt}$ не удовлетворяется тождественно. Таким образом, для отсутствия подвижных точек ветвления необходимо следующее:

Если $p=\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,...$*- кратные корни уравнения* $P(t,\eta,p)=0$, *соответствующие точкам ветвления p, то* $\frac{d\eta}{dt}=\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2=...$ *тождественно.*

Рассмотрим далее случай, когда условие $\frac{d\eta}{dt}=\tilde{\omega}$ выполнено тождественно.

Уравнение в данном случае примет вид

$$\alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dt}=\sum_{r=k}^{\infty}\frac{y^r}{r!}(\sum_i\frac{c_r^{(i)}(t-t_0)^i}{i!}).$$

Решение очевидно, именно y =0 или $x(t)=\eta(t)$.

Это *особое решение* уравнения, возникшее в виде корня p - дискриминанта. Кроме указанного могут быть еще и другие решения.

Рассмотрим эти решения (а) при $\alpha-1>k$ и (б) при $\alpha-1<k$.

(а) Пусть $\alpha-1=k+r$; уравнение может быть разделено на y^k, тогда оно примет вид

$$\alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dt}=c_k^{(0)}+\text{члены с } y \text{ и } t\text{-}t_0,$$

где $r\geq 1$ и $c_k^{(0)}\neq 0$, когда t_0 не является одной из фиксированных особых точек уравнения. Так

$$\frac{dt}{dy}=\frac{\alpha}{c_k^{(0)}}y^r+\text{высшие члены}$$

- уравнение, имеющее аналитическое решение $t=t_0+P_{r+1}(y)$, которое в свою очередь приводит к $y=P_1\{(t-t_0)^{1/(r+1)}\}$, откуда решение первоначального уравнения принимает вид

$$x(t)=\eta(t)+P_\alpha\{(t-t_0)^{1/(r+1)}\},$$

а поскольку $r\geq 1$, то это решение всегда имеет подвижную точку ветвления.

(б) Пусть $k=\alpha+s-1$.

После деления на $y^{\alpha-1}$ уравнение принимает вид

$$\alpha\frac{dy}{dt}=c_k^{(0)}y^s+\text{высшие члены}\ .$$

В данном случае $\dfrac{dy}{dt}$ - аналитическая функция и если $s>0$, то очевидным единственным решением, обращающимся в нуль при $t=t_0$ будет $y=0$. Так особое решение $x(t)=\eta(t)$ единственное при $s>0$.

Если $s=0$, то существует аналитическое решение $y=\dfrac{c_k^{(0)}}{\alpha}(t-t_0)+P_2(t-t_0)$

а решение первоначального уравнения будет $x(t)=\eta(t)+P_\alpha(t-t_0)$,

оно не имеет точки ветвления при $t=t_0$.

Следовательно, *условие* $k\geq\alpha-1$ *необходимо для отсутствия подвижных точек ветвления.*

Случай (IV). В данном случае $x(t)=\eta(t)$ - решение общее для обоих уравнений $\Delta(t_0,x_0)=0$, $a_0(t_0,x_0)=0$, и уравнение $P(t,\eta(t),p)=0$ имеет кратный бесконечный корень. Из корней $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$ уравнения $P(t,x,p)=0$, которые становятся бесконечными при $x=\eta(t)$, пусть $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$ образуют цикл порядка $\alpha\geq 1$; тогда p_1 может быть выражено в виде

$$p_1=(x-\eta(t))^{-k/\alpha}(c_0+c_1(x-\eta(t))^{1/\alpha}+\frac{c_2}{2}(x-\eta(t))^{2/\alpha}+\ldots),$$

где коэффициенты c зависят от t, а k - положительное целое число, выбранное таким образом, что c_0 не равно тождественно нулю. Причем, как и выше, такое значение t_0, для которого $c_0^{(0)}=c_0(t_0)\neq 0$.

Пусть $x-\eta(t)=y^\alpha$, при этом уравнение примет вид

$$\alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dt}=-\frac{d\eta}{dt}+y^{-k}(c_0+c_1y+\frac{c_2}{2}y^2+\ldots)$$

или $\dfrac{dt}{dy}=\alpha y^{k+\alpha-1}\{-y^k\dfrac{d\eta}{dt}+c_0+c_1y+\ldots\}^{-1}=\dfrac{\alpha}{c_0^{(0)}}y^{k+\alpha-1}+\text{высшие члены}.$

Поскольку $k+\alpha-1>0$, это уравнение имеет единственное аналитическое решение $t-t_0=P_{k-\alpha}(y)$, откуда, обращая, получим $y=P_1\{(t-t_0)^{1/(k+\alpha)}\}$,

Следовательно, $x(t)=\eta(t)+P_\alpha\{(t-t_0)^{1/(k+\alpha)}$.

Поскольку $k>0$, решение имеет подвижную точку ветвления, что верно даже, когда $\alpha=1$; таким образом, выражение для p_1 однозначно.

Следовательно *для отсутствия подвижных точек ветвления необходимо, чтобы,* $\Delta(t,x)$ и $a_0(t,x)$ *не имело общего множителя вида* $x-\eta(t)$.

Полученные условия могут быть сформулированы следующим образом: для не появления подвижных точек ветвления необходимы следующие условия:

(A) *Коэффициент* a_0 (t, x) *не зависит от x, следовательно, приводится к функции только t или к постоянной.*

Уравнение может быть разделено на $a_0(t, x)$, оно примет вид

$$P(t,x,p) = p^m + b_1(t,x)p^{m-1} + ... + b_{m-1}(t,x)p + b_m(t,x) = 0,$$

где коэффициенты $b_i(t,x)$, i=1,…,m - полиномы от x и аналитические, за исключением изолированных особых точек, относительно t.

(B) *Если* $x=\eta(t)$ - *корень* $\Delta(t,x)=0$, *а* $p=\tilde{\omega}(t)$ - *кратный корень* $P(t,\eta,p)=0$, *так что соответствующий корень* $P(t,x,p)=0$, *рассматриваемый в качестве функции от* $x-\eta(t)$ *ограничен, то*

$$\frac{d\eta}{dt} = \tilde{\omega}(t).$$

(C) *Если порядок любой ветви равен* α, *так что уравнение получается вида*

$$\frac{d}{dt}\{x-\eta(t)\} = c_k\{x-\eta(t)\}^{k/\alpha}$$

то $k \ge \alpha - 1$.

Приведенные необходимые условия не являются достаточным, а потому рассмотрим

Случай (V). Зависимая переменная бесконечна в начале.

Чтобы рассмотреть возможность ветвления зависимой переменной в бесконечности допустим, что $x \to \infty$ при $t \to t_0$. Произведем замену $x= y^{-1}$ так, чтобы $y \to 0$ при $t \to t_0$, и напишем $q = \frac{dy}{dt} = -\frac{p}{y^2}$, тогда уравнение примет вид

$$q^m - b_1(t,y^{-1})y^2q^{m-1} + ... + (-1)^m b_m(t,y^{-1})y^{2m} = 0.$$

Чтобы коэффициент каждой степени q был рациональным относительно y, при коэффициенте q^m, равном единице, необходимо и достаточно, чтобы $b_1(t,x), b_2(t,x),...,b_m(t,x)$ были степени не больше чем 2, 4,..., 2m относительно x. При m=1 уравнение приводится к уравнению Риккати.

Таким образом, в дополнение к условию (A), должны быть введены следующие условия:

(A') $b_r(t,x)$ *степени не больше 2r относительно x* (r=1,…,m).

Допустим, что $\tilde{\Delta}$ является *q*- дискриминантом преобразованного уравнения. Если дискриминант $\Delta(t,x)$ первоначального уравнения имеет множитель $x-\eta(t)$, то $\tilde{\Delta}(t,y)$ будет иметь соответствующий множитель $y-1/\eta(t)$, следовательно, если условия (B) и (C) удовлетворены для первоначального уравнения, то они будут удовлетворены и для преобразованного уравнения. Однако, если условие (A') удовлетворено, то $\Delta(t,x)$ степени не больше $2m(m — 1)$ относительно *x*, но может быть и более низкой степени, например, $2m(m - 1) - s$. В этом случае $\tilde{\Delta}$ *D'(z, w)* будет содержать множитель y^s.
Этот последний случай должен быть рассмотрен отдельно. На необходимость рассмотрения этого случая указали Хил и Берри; он приводит к специальным условиям отсутствия точек ветвления.

Действительно, для уравнения $\left(\dfrac{d(x-f(t))}{dt}\right)^m=(x-f(t))^{m/r}$, где *m* и *r* целые, взаимно простые числа и $r < m$. Приведенное уравнение удовлетворяет условиям (A), (A'), (B), (C), но, как показывает решение $x=f(t)+(\frac{r}{m}(t_0-t))^{-m/r}$, оно имеет подвижную точку ветвления, для которой *x* бесконечна.

Если *q*, выведенное из преобразованного уравнения и рассматриваемое как функция *y*, имеет точку ветвления, соответствующую $y=0$, то (условие B) $q=0$ при $y=0$. Отсюда следует, что *y* должно быть множителем члена $y^{2m}b_m(t,y^{-1})$. Но поскольку *y* является также множителем дискриминанта, он должен быть также множителем предыдущего коэффициента $y^{2m-2}b_{m-1}(t,y^{-1})$.
Отсюда следует, что уравнение относительно *q*, имеет вид

$$q=c_k^{(0)}y^{k/\alpha}+\text{ высшие члены,}$$

где $c_k^{(0)}$ - постоянная, не равная нулю. Чтобы это выражение для *q* дало решение, не имеющее подвижной точки ветвления, необходимо, чтобы
$k\geq\alpha-1$.
Полученные два новых условия могут быть сформулированы следующим образом.
(B') *Если уравнение преобразовано заменой* $x = y^{-1}$ *и* *y* *- множитель дискриминанта преобразованного уравнения, то* *y* *должно быть множителем последних двух коэффициентов преобразованного уравнения, когда* *q* *- многозначная функция* *y*.

(C$^{'}$) *Если порядок ветвления* α, *и уравнение может быть представлено в виде* $\frac{dy}{dt}=c_k^{(0)}y^{k/\alpha}$, *то* $k\geq\alpha-1$.

Условия (A), (B), (C) и дополнительные условия (A'), (B'), (C') необходимы и, нетрудно показать, достаточны для отсутствия подвижных точек ветвления. Достаточность мы обсудим в следующем пункте. Таким образом мы доказали

Теорема. (Фукс) Для того, чтобы уравнение вида

$$P(t,x,p)=a_0(t,x)p^m+a_1(t,x)p^{m-1}+...+a_{m-1}(t,x)p+a_m(t,x)=0,$$

где $a_r(t,x)$ (r=0,1,…,m) - многочлены относительно x и аналитичны по t, за исключением конечного числа особых точек, не имело критических подвижных точек, должны выполняться следующие условия:

1) a_0 (t, x) не должно содержать x и является, следовательно, функцией только от t, таким образом, деля обе части уравнения на a_0 (t) , можно его всегда привести к такому виду, что a_0 (t) = 1 и $\deg(a_r(t,x))\leq 2r$;

2) Если $x=\eta(t)$ - корень $\Delta(t,x)=0$, а $p=\tilde{\omega}(t)$ - кратный корень $P(t,\eta,p)=0$, так что соответствующий корень $P(t,x,p)=0$, рассматриваемый в качестве функции от $x-\eta(t)$ ограничен, то

$$\frac{d\eta}{dt}=\tilde{\omega}(t);$$

3) Если порядок любой ветви равен α, так что уравнение получается вида $\frac{d}{dt}\{x-\eta(t)\}=c_k\{x-\eta(t)\}^{k/\alpha}$, то $k\geq\alpha-1$;

4) Если уравнение преобразовано заменой $x = y^{-1}$ и y- множитель дискриминанта преобразованного уравнения, то y должно быть множителем последних двух коэффициентов преобразованного уравнения, когда q — многозначная функция y;

5) Если порядок ветвления α, и уравнение может, быть представлено в виде $\frac{dy}{dt}=c_k^{(0)}y^{k/\alpha}$, то $k\geq\alpha-1$.

4.2.2. Теорема Пенлеве.

Для полноты изложения и для того, чтобы рассуждения предыдущего пункта были более прозрачными докажем достаточность условий Фукса.

Теорема (Пенлеве) Решения уравнения

$$P(t,x,p)=a_0(t,x)p^m+a_1(t,x)p^{m-1}+...+a_{m-1}(t,x)p+a_m(t,x)=0, \quad (*)$$

где $P(t,x,p)$ - многочлен относительно *x*, $p=\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ и аналитическая функция от *t*, не имеют подвижных существенно особых точек.

Доказательство.

Отметим сначала все неподвижные точки, которые могут быть особыми. Сюда отнесем следующие точки.

1) Особые точки аналитических функций переменного *t* - коэффициентов при степенях *p* и *x* в уравнении (*). Множество этих точек назовем M_1.

2) Те значения *x* и *t*, которые одновременно обращают в нуль все выражения $a_r(t,x)$ ($r=0,1,...,m$). Множество соответствующих значений *t* назовем M_2.

3) Те значения *x* и *t*, для которых уравнение $\Delta(t,x)=0$ имеет кратные корни. Множество соответствующих значений *t* назовем M_3.

4) Наконец, сделав замену $x=1/y$ отметим все точки *t*, которые войдут в M_1, M_2 или M_3 для преобразованного уравнения. Множество соответствующих точек назовем M_4. Пусть $M=\bigcup\limits_{i=1}^{4} M_i$. Точки множества *M* могут быть существенно особыми точками решений. Очевидно, что точки множества *M* - неподвижные особые точки.

Рассмотрим теперь точку t_0, отличную от точек множества *M*, и будем приближаться к t_0 по некоторому пути *L*. Докажем, что при этом решение $x(t)$ уравнения (*) будет стремиться к некоторому вполне определенному значению.

Действительно, обозначим решения уравнения $\Delta(t,x)=0$ через $\eta_i(t)$, а решения уравнения $a_0(t,x)=0$ через $g_j(t)$ и пусть при $t=t_0$ функции $\eta_1(t),...,\eta_\mu(t)$ и $g_1(t),...,g_\nu(t)$ принимают значения $z_1,...,z_{\mu+\nu}$. Построим на плоскости (*x*) точки $z_1,...,z_{\mu+\nu}$ и опишем из них, как из центров, окружности γ. Из 0, как из центра, опишем окружность Г с достаточно большим радиусом *R*. Пусть *S* - часть плоскости (*x*), лежащая внутри Г и вне всех γ.

Зададим произвольно $\varepsilon>0$ и найдем столь малое $\delta>0$, что если $|t-t_0|<\delta$, то соответствующие значения $\eta_1(t),...,\eta_\mu(t),g_1(t),...,g_\nu(t)$ отличаются от $z_1,...,z_{\mu+\nu}$ по модулю меньше чем на $\varepsilon>0$, так что можно выбрать $\delta>0$, настолько малым, что все $\eta_1(t),...,\eta_\mu(t),g_1(t),...,g_\nu(t)$ будут лежать внутри окружностей γ', концентрических с окружностями γ, радиуса меньше $\varepsilon/2>0$. Опишем еще окружность Γ', концентрическую с Γ, радиуса $R+4\delta$. Обозначим через S' область, ограниченную окружностями Γ' и γ'.

Различные ветви $\dot{x}_1(t),...,\dot{x}_m(t)$, определяемые уравнением (*), голоморфны, пока t остается внутри окружности $|t-t_0|<\delta$, и x лежат в S'. Выберем оценку для $\delta>0$, использующую оценку, следующую из теоремы Коши для S'. Получаем, что если $|t_1-t_0|<\delta$ и $x(t_1)\in S'$, то $x(t)$ голоморфна при $|t-t_1|<\delta$.

Рассмотрим теперь какое-нибудь решение $x(t)$ уравнения (*). Если при подходе t к t_0 решение $x(t)$ не стремится ни к одному из значений z_k, ни к ∞, то сколь угодно близко к t_0 найдутся такие значения t',для которых $x(t)$, которые лежат внутри области S.

Если взять t' таким образом, чтобы $|t'-t_0|<\delta/4$, то соответствующее решение будет голоморфным внутри окружности $|t-t_0|<\delta/2$ и, следовательно, в точке t_0. Таким образом, при подходе t к t_0 решение уравнения или стремится к z_k, или стремится к бесконечности, или голоморфно в t_0. В первых двух случаях, как показано выше, интеграл имеет в t_0 или алгебраическую критическую точку, или полюс.

Итак, теорема Пенлеве доказана.

Из этой теоремы сразу же следует, что выведенные в предыдущем пункте условия Фукса для отсутствия в решениях подвижных критических точек *достаточны*, так как там были разобраны все случаи, когда при подходе t к некоторому значению t_0 решение $x(t)$ стремится к некоторому определенному значению.

Замечание 1.Наличие подвижных точек ветвления является серьезным препятствием для нахождения решения в квадратурах. Так Брио и Буке(Brio and Bouquet) исследовали уравнения, удовлетворяющие условиям Фукса и имеющие вид $p^m+a(t,x)=0$. Ими было из рассматриваемого класса шесть типов уравнений свободных от подвижных особых точек, у которых степень $a(t,x)$ равна $2m$:

Тип I: $p^m+a(t)(x-a_1)^{m-1}(x-a_2)^{m+1}=0$;

Тип II: $p^2+a(t)(x-a_1)^2(x-a_2)(x-a_3)=0$ или

$p^2+a(t)(x-\eta(t))^2(x-a_2)(x-a_3)=0$ $(a_2\neq a_3)$;

Тип III: $p^2+a(t)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)=0$;

Тип IV: $p^3 + a(t)(x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-a_3)^2 = 0$;

Тип V: $p^4 + a(t)(x-a_1)^3(x-a_2)^3(x-a_3)^2 = 0$;

Тип VI: $p^6 + a(t)(x-a_1)^3(x-a_2)^3(x-a_3)^2 = 0$.

Замечание 2. Как следует из примера уравнения $\ddot{x} = (\dot{x})^2 \dfrac{2x-1}{1+x^2}$ для уравнений второго порядка, определяемых алгебраическим соотношением, существуют решения с подвижной особой точкой. Пенлеве (P. Painleve$'$) и Гамбье (B. Gambier) классифицировали уравнения второго порядка вида

$$\ddot{x} = R(t, x, \dot{x}),$$

не имеющих критических подвижных точек, при условии , что R рациональна по $x,\ \dot{x}$, мероморфна по t и определена в некоторой области комплексной плоскости t. Уравнения, обладающими этим свойством называют уравнениями класса P.

Пенлеве и Гамбье нашли такой список из 50 уравнений, что каждое уравнение класса P может быть индуцировано из одного из уравнений этого списка. Из этих пятидесяти уравнений 44 интегрируются в квадратурах или приводятся к виду уравнения (*). Остальные шесть называют ***уравнениями Пенлеве***. Приведем их в не совсем обычных обозначениях

$$\text{I. } \ddot{x} = 6x^2 + t; \qquad \text{II. } \ddot{x} = 2x^3 + tx + a;$$

$$\text{III. } \ddot{x} = \dot{x}^2 x^{-1} + e^t(ax^2 + b) + e^{2t}(cx^3 + d),\ \ |b| + |d| \neq 0;$$

$$\text{IV. } \ddot{x} = (1/2)\dot{x}^2 x^{-1} + (3/2)x^3 + 4tx^2 + 2(t^2 - \alpha)x + \beta x^{-1};$$

$$\text{V. } \ddot{x} = \dot{x}^2\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1}\right) - \frac{\dot{x}}{t} + \frac{(x-1)^2}{t}\left(\alpha x + \frac{\beta}{x}\right) + \gamma\frac{x}{t} + \delta\frac{x(x+1)}{x-1};$$

$$\text{VI. } \ddot{x} = \frac{\dot{x}^2}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right) + \dot{x}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t}\right) +$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{x^2} + \gamma\frac{t-1}{(x-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(x-1)^2}\right).$$

Все решения первых четырех уравнений мероморфные функции. Решения пятого имеет логарифмические точки ветвления t=0 и $t = \infty$, шестого: t=0, t=1 и $t = \infty$. Обнаружена связь между уравнениями Пенлеве и интегрируемыми уравнениями математической физики. Так, если $w(x)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{d^2w}{dx^2} = 2w^3 + xw + a$, то функция

$$u(x,t) = t^{-2/3}\left(\frac{dw(x)}{dx} + w^2(x)\right)$$

является решением уравнения Кортевега –де-Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

возникшее при описании теории мелкой воды. Впоследствии оказалось, что это же уравнение встречается в целом ряде задач математической физики.

ГЛАВА 5

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Постановка задачи. Линейные и квазилинейные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$F\left(u, x^1, \dots, x^n, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}\right) = 0 \qquad (*)$$

для вещественной функции $u = u(x)$ от n независимых переменных, где $F(u, x, p)$ - вещественная функция от $1 + n + n$ переменных, изменяющихся в открытом множестве E^{2n+1}. Решением уравнения (*) называется функция $u = u(x)$ класса C^1, определенная в некотором открытом x-множестве E^n и такая, что точки $(u(x), x, u_x(x))$ принадлежат E^{2n+1} при $x \in E^n$ и обращают (*) в тождество относительно x. Ввиду локального характера доказываемых теорем мы считаем, что находимся в одной локальной карте на многообразии.

Введем обозначения: $p=(p^1,\dots,p^n)$, $p^i = \partial u / \partial x^i (i = 1,\dots,n)$; $F_u = \partial F / \partial u$; $F_x = (\partial F / \partial x^1, \dots, \partial F / \partial x^n)$; $F_p = (\partial F / \partial p^1, \dots, \partial F / \partial p^n)$; $u_x(x) = (\partial u / \partial x^1, \dots, \partial u / \partial x^n)$; для сокращения записи формул предполагаем, что в пространстве E^n введено скалярное произведение $(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$, таким образом, $u_x(x)$ обозначает градиент функции $u(x)$.

Вообще говоря, обычно ищут решение, принимающее на какой-нибудь гиперповерхности S заранее заданные значения, т.е. решают задачу Коши (*). Сформулируем ее точнее. Пусть S - часть C^1-гиперповерхности в x - пространстве, т.е. S есть множество точек

$$S = \{x \in E^n : x = \gamma(v), v = (v^1, \dots, v^{n-1})\},$$

где $S(v)$ принадлежит окрестности точки $v = v_0$ классу C^1 и ранг матрицы $D(\gamma(v)) = (\partial \gamma^i / \partial v^j)$ ($i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,n-1$) равен n - 1. Пусть на поверхности S задана функция φ, или, что равносильно, пусть задана функция $\varphi = \varphi(v)$, где v изменяется вблизи v_0. Тогда «начальное условие» состоит в том, что на поверхности S решение $u = u(x)$ должно обращаться в φ, т.е. $u(\gamma(v)) = \varphi(v)$.

Теоремы существования, которые мы докажем, будут локальными в том смысле, что они дают решения $u = u(x)$, определенные только для x, близких к

$x_0 = \gamma(v_0)$. Мы будем пользоваться так называемым *методом характеристик*, который принадлежит Коши и часто называется его именем. С помощью этого метода поставленная задача сводится к задаче теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для систем уравнений в частных производных первого порядка аналога этого метода не существует.

Для того, чтобы разъяснить идею применяемого метода, рассмотрим линейные уравнения (*) в частных производных, имеющие вид

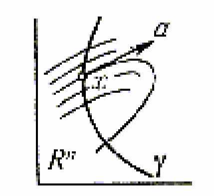
$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x^1} + ... + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x^n} = 0 \qquad (1)$$

т.е. $F\ (u, x, p)$ не зависит от u и представляется в виде

$$F(u,x,p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)p^i = a(x)\cdot p.$$

Определение. Векторное поле $a = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ называется ***характеристическим векторным полем*** для уравнения (1), а его фазовые кривые называются ***характеристиками***. Уравнение $\dot{x} = a(x)$ называется ***уравнением характеристик*** для уравнения с частными производными (1).

Соответствующий уравнению характеристик локальный поток $g(t,x)$ называется ***характеристическим потоком*** для уравнения (1).



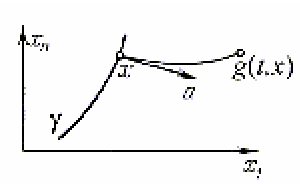
Заметим, что задача Коши не всегда имеет решение. Действительно, вдоль каждой характеристики решение u постоянно. Но характеристика может пересекать начальную поверхность γ несколько раз. Если значения заданной функции φ в этих точках различны, то соответствующая задача Коши, не имеет решения ни в какой области, содержащей указанную характеристику. Поэтому предположим, что характеристический поток пересекает поверхность S трансверсально (не касательно). Для S это условие может быть выражено так: $\det\left[D(\gamma(v)), F_p(x(v))\right] \neq 0$. Здесь $\left[D(\gamma(v)), F_p(x(v))\right]$ обозначает $n\times n$-матрицу, первые n - 1 столбцов которой составляют $[n\times(n-1)]$ - матрицу Якоби $D(\gamma(v)) = (\partial\gamma^i/\partial v^j)$, а последний столбец есть вектор F_p.

В этом случае поверхность S называется нехарактеристической. Совокупность характеристик, исходящих из точек поверхности S, заполняет в x-пространстве E^n (малую) область. Любая достаточно гладкая функция $\Phi(x)$ постоянная на траекториях характеристического потока $g(t,x)$(первый интеграл) удовлетворяет уравнению (1). Для любого x из окрестности поверхности S (x= $g(t,x_1)$, $x_1 \in S$) положим $u(x) = \varphi(g(-t,x))$. Так определенная функция при подходящих условиях гладкости является решением задачи Коши для линейного уравнения.

Для линейного неоднородного уравнения первого порядка вида

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x^1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x^n} = b(x)$$

решение задачи Коши в достаточно малой окрестности любой нехарактеристической точки x_0 начальной поверхности S, и притом единственное, дается формулой $u(g(t,x)) = \varphi(x) + \int_0^t b(g(s,x))ds$,



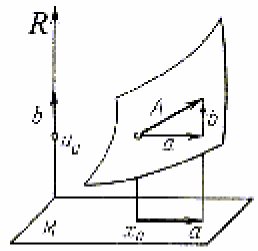
где $g(t,x)$- характеристический поток (с начальным условием $g(0,x) = x \in S$). Иными словами: производная решения вдоль характеристик - известная функция *b*.

Стало быть, приращение решения вдоль отрезка характеристики равно интегралу от функции *b* вдоль этого отрезка.

Рассмотрим вместо линейного уравнения более сложное, скажем квазилинейное уравнение т.е. уравнение, в которое частные производные высшего (первого) порядка входят линейным образом. Такое уравнение имеет вид

$$a_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x^1} + \ldots.. + a_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x^n} = b(x,u).$$

Квазилинейное уравнение относительно неизвестной функции $u: E^n \to R$ означает, что если точка x выходит из x_0 и начинает двигаться по E^n со



скоростью $a(x_0, u_0)$, то значение решения $u=u_0$ начинает меняться со скоростью $b(x_0, u_0)$.

Иными словами, вектор A (x_0, u_0), приложенный в точке (x_0, u_0) пространства $E^n \times R$ и имеющий компоненты $a(x_0, u_0)$ вдоль E^n и $b(x_0, u_0)$ вдоль R, касается графика решения.

Определение. Вектор A (x_0, u_0) называется *характеристическим вектором* квазилинейного уравнения в точке (x_0, u_0).

Характеристические векторы во всех точках пространства $M \times R$ образуют ***векторное поле*** A. Это поле называется ***характеристическим векторным***

полем квазилинейного уравнения. Фазовые кривые характеристического векторного поля называются ***характеристиками*** квазилинейного уравнения.

Дифференциальное уравнение, заданное полем фазовой скорости A, называется ***уравнением характеристик***.

Уравнение характеристик имеет вид

$$\dot{x}^1 = a_1(x,u),\dots,\dot{x}^n = a_n(x,u);\ \ \dot{u} = b(x,u).$$

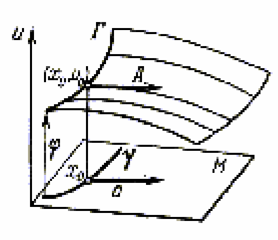
Иногда их записывают в симметричном виде

$$\frac{dx^1}{a_1(x,u)} = \frac{dx^2}{a_2(x,u)} = \dots = \frac{dx^n}{a_n(x,u)} = \frac{du}{b(x,u)}$$

Замечание. Линейное уравнение является частным случаем квазилинейного, однако, характеристики линейного уравнения – не то же самое, что характеристики того же уравнения, рассматриваемого как квазилинейное: характеристики линейного уравнения лежат в M, а квазилинейного - в $M \times R$. Характеристики линейного уравнения - это проекции характеристик того же уравнения рассматриваемого как квазилинейное из $M \times R$ на M.

Отметим, что функция u тогда и только тогда является решением квазилинейного уравнения, когда ее график содержит вместе с каждой своей точкой интервал характеристики, проходящей через эту точку.

Таким образом, нахождение решений квазилинейного уравнения сводится к отысканию его характеристик. Если характеристики известны, то остается лишь составить из них поверхность, являющуюся графиком функции: эта функция будет решением квазилинейного уравнения, и все решения получаются таким способом.



Рассмотрим график функции $\varphi : S \to R$. Этот график является гиперповерхностью в прямом произведении $S \times R$. Поскольку S вложено в E^n, мы можем рассматривать график Г функции φ как подмногообразие (коразмерности 2) в $E^n \times R$.

Определение. *Начальным подмногообразием* для начального условия φ на S называется подмногообразие Г в $E^n \times R$, являющееся графиком φ на S.

Таким образом, начальное многообразие Г задает как гиперповерхность S в E^n так и начальное условие φ, на S.

Определение. Начальное условие (S, φ) называется нехарактеристическим для квазилинейного уравнения в точке x_0 из S, если вектор $a(x_0, u_0)$, где $u_0 = \varphi(x_0) = \varphi(\gamma(v_0))$ в этой точке не касается поверхности S.

Утверждение 1. Решение квазилинейного уравнения с нехарактеристическим в точке x_0 начальным условием в окрестности этой точки существует и локально единственно.

Доказательство. Из нехарактеристичности начального условия в точке x_0 следует, что:

1) Характеристическое поле A не обращается в окрестности точки (x_0, u_0) в нуль и не касается начального многообразия Г в рассматриваемой точке и, следовательно, в ее окрестности. Поэтому существует и единственна локальная интегральная поверхность, содержащая начальное многообразие Г .

2) Касательная плоскость к интегральной поверхности в точке (x_0, u_0) невертикальна (не содержит оси u). Поэтому интегральная поверхность является графиком функции. Эта функция и есть искомое решение.

Замечание. Доказательство содержит также процедуру построения решения задачи Коши для квазилинейного уравнения.

Пример.. Рассмотрим уравнение $-x^2\dfrac{\partial u}{\partial x^1} + x^1\dfrac{\partial u}{\partial x^2} + (1+(x^3)^2)\dfrac{\partial u}{\partial x^3} = 3x^3 u$ с неизвестной функцией $u(x^1, x^2, x^3)$. Уравнение характеристик для этого уравнения имеет вид $\dfrac{dx^1}{-x^2} = \dfrac{dx^2}{x^1} = \dfrac{dx^3}{1+(x^3)^2} = \dfrac{du}{3x^3 u}$ - система дифференциальных уравнений с четырьмя переменными. Найдем три первых интеграла этой системы:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2; \quad \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} - \operatorname{arctg}x^3; \quad (1+(x^3)^2)^{-3/2}u\,.$$

Производные этих первых интегралов линейно независимы.

Отсюда получаем общее решение уравнения :

$$u = (1+(x^3)^2)^{3/2}\Phi((x^1)^2 + (x^2)^2, \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} - \operatorname{arctg}x^3),$$

где Φ - произвольная функция двух переменных.

Интерпретация. Заданное уравнение 2) выражает тот факт, что дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

инвариантно относительно группы вращений вокруг начала координат [в плоскости [R^2 с координатами t, x]. Полученная формула показывает, что такое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\ddot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{3/2}} = \Phi((t)^2+(x)^2, \operatorname{arctg}\frac{x}{t} - \operatorname{arctg}\dot{x}).$$

Детально разобравшись с линейными и квазилинейными уравнениями вернемся к общему случаю.

Предположим, что в (*) функция F (u, x, p) принадлежит классу C^1 в некотором открытом (u, x, p)-множестве, а $u = u(x)$ — классу C^2. Можно освободиться от «нелинейности» уравнения (*), продифференцировав (*) по какой-либо фиксированной компоненте x^m вектора x. Тогда для u мы получим квазилинейное уравнение второго порядка, т.е. уравнение, линейное относительно вторых частных производных от u. Это уравнение формально может быть записано как уравнение первого порядка, квазилинейное относительно

$$p^m = \frac{\partial u}{\partial x^m}: \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p^j}\frac{\partial p^m}{\partial x^j} + \frac{\partial F}{\partial x^m} + F_u p^m = 0.$$

Тогда, мы приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p^i},\ i=1,\dots,n; \quad \frac{dp^m}{dt} = -(\frac{\partial F}{\partial x^m} + F_u p^m),\ m=1,\dots,n;$$

к которым можно добавить уравнение $\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n}(\partial u/\partial x^j)\dot{x}^j = \sum_{j=1}^{n} p^j \frac{\partial F}{\partial p^j}$.

Таким образом, получили систему автономных обыкновенных дифференциальных уравнений для u, x, p, которые могут быть переписаны так:

$$\dot{x} = F_p, \qquad \dot{p} = -F_x - pF_u, \qquad \dot{u} = p \cdot F_p \qquad (2)$$

Локальный поток , порожденный системой (2), называется ***характеристической полосой***, а его проекция $u(t)$, $x(t)$ на (u, x)- пространство называется ***характеристикой***.

Условие вида $F_p(u,x,p) \neq 0$ гарантирует от вырождения характеристики в точку. «Вывод» системы (2) будет получен как формальный результат в утверждении 3. Решение задачи Коши (*) не может существовать, если на S не существует вектора $p = p(v)$, являющегося в точке $x = \gamma(v)$ градиентом функции u (x) и удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} F(\varphi(\gamma(v)),\gamma(v),p)=0, \\ p\cdot\dfrac{\partial\gamma(v)}{\partial v^i}=\dfrac{\partial\varphi(\gamma(v))}{\partial v^i}, \;\; i=1,...,n-1. \end{cases}$$

Последнее условие получается в результате дифференцирования уравнения поверхности по v^i. В частности, существует вектор $p_0=p(v_0)$ такой, что

$$F(u_0,x_0,p_0)=0,$$

$$p_0\cdot\frac{\partial\gamma(v)}{\partial v^i}|_{v=v_0}=\frac{\partial\varphi(\gamma(v))}{\partial v^i}|_{v=v_0}, \;\; i=1,\ldots,n\text{-}1.$$

Предположим, что «начальные данные не являются характеристическими в точке v=v_0 », т.е. что

$$\det\left[\left(\frac{\partial\gamma(v)}{\partial v}|_{v=v_0}\right),F_p(u_0,x_0,p_0)\right]\neq 0,$$

где первые n - 1 столбцов матрицы состоят из векторов

$\dfrac{\partial\gamma(v)}{\partial v^i}|_{v=v_0}$, i = 1,…, n-1, а последний столбец есть $F_p(u_0,x_0,p_0)$.

Тогда по теореме о неявной функции из

$$F(u_0,x_0,p_0)=0;\, p_0\cdot\frac{\partial\gamma(v)}{\partial v^i}|_{v=v_0}=\frac{\partial\varphi(\gamma(v))}{\partial v^i}|_{v=v_0}, \;\; i=1,\ldots,n\text{-}1;$$

$$\det\left[\left(\frac{\partial\gamma(v)}{\partial v}|_{v=v_0}\right),F_p(u_0,x_0,p_0)\right]\neq 0$$

и из условий $x=\gamma(v)\in C^2$, $F\in C^1$, $\varphi\in C^2$ следует, что система

$$\begin{cases} F(\varphi(\gamma(v)),\gamma(v),p)=0, \\ p\cdot\dfrac{\partial\gamma(v)}{\partial v^i}=\dfrac{\partial\varphi(\gamma(v))}{\partial v^i}, \;\; i=1,...,n-1 \end{cases}$$

имеет в окрестности точки x =x_0 единственное решение p = $p(v)$ класса C^1, которое обращается в p_0 при v=v_0 , т.е. $p(v_0)=p_0$.

Заметим, что в нелинейном, как и в квазилинейном случае мы не можем говорить о том, что «поверхность S является нехарактеристической», но можно лишь сказать, что «начальные данные являются нехарактеристическими». Начальные данные состоят из поверхности $S: x=\gamma(v)$, функции $\varphi(\gamma(v))$, вектора p_0 и (при выполнении $\det\left[\left(\dfrac{\partial\gamma(v)}{\partial v}|_{v=v_0}\right),F_p(u_0,x_0,p_0)\right]\neq 0$) неявной функции $p(x)$.

Из непрерывности детерминанта следует, что

$$\det\left[\left(\frac{\partial\gamma(v)}{\partial v}\right), F_p(\varphi(\gamma(v)), \gamma(v), p(v))\right] \neq 0$$

для v, близких к v_0. В том случае, когда определитель не равен нулю, определителя, начальные данные называются ***нехарактеристическими.***

Задача Коши (*) часто рассматривается в другой форме, которую мы сейчас и получим. Она будет использована в § 2. Предположим, что поверхность S принадлежит классу C^1. Без потери общности можно считать, что $x_0 = 0$ и что S задана в виде $x^n = \psi(x^1,...,x^{n-1})$, где $\psi \in C^2$ для значений $(x^1,\ldots,x^{n-1})$ вблизи 0, а $\psi(0) = 0$. Если $(x^1,...,x^{n-1}, x^n - \psi(x^1,...,x^{n-1}))$ введены как новые координаты, которые мы снова будем обозначать через x, то в новых координатах S представляет собой вблизи точки $x = 0$ часть гиперплоскости $x^n = 0$. Уравнение (*) преобразуется в другое уравнение того же вида, хотя, например, может случиться, что, если исходная функция F принадлежит C^2, то новая функция F имеет непрерывные первые и вторые производные, за возможным исключением производных вида $\partial^2 F / \partial x^i \partial x^j (i \neq j)$. Условие неравенства нулю определителя в новых координатах принимает вид $\partial F(u_0, x_0, p_0) / \partial p^n \neq 0$. Таким образом, если выполнено условие $F(u_0, x_0, p_0) = 0$, то из уравнения $F(u, x, p) = 0$ можно найти p^n через $u, x, p^1,\ldots, p^{n-1}$, скажем по формуле $p^n = -H(u, x, p^1,..., p^{n-1})$, и тогда уравнение (*) будет эквивалентно уравнению $p^n + H(u, x, p^1,..., p^{n-1}) = 0$ для значений (u, x, p), близких к (u_0, x_0, p_0). Значит, если изменить обозначения, заменив n-1 на n и x на (x, t), то задача Коши принимает вид $\partial u / \partial t + H(u, t, x, u_x) = 0$, $u(0, x) = \varphi(x)$, где $u=u(t,x)$ - искомая, а $\varphi(x)$ - начальная функция.

Установим теперь связь между решениями уравнения (*) и характеристическими полосами или характеристиками.

Утверждение 2. Пусть $F(u, x, p)$ принадлежит классу C^1. Тогда $F(u, x, p)$ является первым интегралом системы (2), т.е. F постоянна вдоль любого решения этой системы.

Доказательство. Достаточно проверить следующее: если $(u(t), x(t), p(t))$ - решение системы (2), то производная функции $F(u(t), x(t), p(t))$ равна 0. А это эквивалентно очевидному равенству

$$F_x \cdot F_p + F_p \cdot (-F_x - pF_u) + F_u(p \cdot F_p) = 0$$

Утверждение 3. Пусть $F(u,x,p) \in C^1$ в открытом множестве E^{2n+1}, и пусть функция $u = u(x) \in C^2$ является решением уравнения (*) в открытом множестве E^n. Тогда для $x_0 \in E^n$ существует характеристическая полоса $u(t), x(t), p(t)$, определенная для малых $|t|$ и такая, что $u(t) = u(x(t))$, $p(t) = u_x(x(t))$ и $x(0) = x_0$.

В частности, в (u,x) - пространстве дуга $(u, x) = (u(t), x(t))$ лежит на гиперповерхности $u = u(x)$ и вектор $(-1, p(t))$ совпадает с нормалью к этой гиперповерхности в точке $(u, x) = (u(t), x(t))$. Следовательно, если $u = u(x) \in C^2$ является решением уравнения (*), то гиперповерхность $u = u(x)$ можно рассматривать как поверхность, составленную из характеристик.

Доказательство утверждения 3 представляет собой повторение «вывода» уравнений (2). Рассмотрим решение $x = x(t)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = F_p(u(x), x, u_x(x)), \qquad x(0) = x_0$$

Дифференцирование уравнения (*) по x^m дает

$$F_u \frac{\partial u}{\partial x^m} + \frac{\partial F}{\partial x^m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p^j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^m \partial x^j} = 0.$$

Положим $p(t) = u_x(x(t))$. Тогда можно считать

$$F_u \frac{\partial u}{\partial x^m} + \frac{\partial F}{\partial x^m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p^j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^m \partial x^j} = 0$$

m-й компонентой вектора $F_u p + F_x + \dot{p} = 0$, где аргумент в F_u и F_y есть $(u(x(t)), x(t), p(t))$. Кроме того, если $u = u(x(t))$, то $\dot{u} = u_x(x(t)) \cdot \dot{x} = p \cdot F_p$. Таким образом, функции $x = x(t)$, $p = u_x(x(t))$, $u = u(x(t))$ являются решением уравнений (2). Утверждение доказано.

Замечание. Справедливость утверждения 3 при условии $u(x) \in C^1$ и $n>2$ до сих пор не установлена. В этом направлении есть частичный результат для $n>2$ и полный ответ для $n=2$.

§ 2. Теорема существования и единственности

Основная теорема относительно уравнения (*) состоит в следующем.

Теорема. Пусть $F(u, x, p)$ принадлежит классу C^2 в открытой области E^{2n+1}, и пусть $(u_0, x_0, p_0) \in E^{2n+1}$. Пусть поверхность S является частью гиперповерхности класса C^2, определенной для x, близких к x_0, и $\gamma(v_0) = x_0$. Пусть $\varphi(v)$ -

функция класса C^2, определенная для v, близких к v_0, и $\varphi(v_0) = x_0$. Пусть имеют место соотношения:

$$F(u_0, x_0, p_0) = 0\,;\; p_0 \cdot \frac{\partial\gamma(v)}{\partial v^i}\Big|_{v=v_0} = \frac{\partial\varphi(\gamma(v))}{\partial v^i}\Big|_{v=v_0},\;\; i=1,\ldots,n\text{-}1;$$

$$\det\left[\left(\frac{\partial\gamma(v)}{\partial v}\Big|_{v=v_0}\right), F_p(u_0, x_0, p_0)\right] \neq 0\,.$$

Тогда в окрестности E^n точки $x = x_0$ задача Коши (*) имеет единственное решение $u = u(x)$ класса C^2.

Из неравенства нулю определителя следует, что $F_p(u_0, x_0, p_0) \neq 0$, и что ранг матрицы $\left(\frac{\partial\gamma(v)}{\partial v}\Big|_{v=v_0}\right)$ равен n - 1. Условие $F_p(u_0, x_0, p_0) \neq 0$, обеспечивает существование гиперповерхности S, удовлетворяющей условию неравенства нулю определителя. Например, если $\partial F / \partial p^n \neq 0$ в точке $(u_0, x_0, p_0) \in E^{2n+1}$, то в качестве S можно взять гиперплоскость $x^n = x_0^n$.

Доказательство. Согласно рассуждениям предыдущего пункта, для v, близких к v_0, существует единственная функция $p = p(v)$ класса C^1, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} F(\varphi(\gamma(v)), \gamma(v), p) = 0, \\ p \cdot \dfrac{\partial\gamma(v)}{\partial v^i} = \dfrac{\partial\varphi(\gamma(v))}{\partial v^i}, i = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

и $p(v_0) = p_0$. Пусть $x=X(t,v)$, $p=P(t, v)$, $u = U(t,v)$ координатные траектории локального потока, соответствующего системе (2), удовлетворяющие начальному условию $X(0,v) = \gamma(v)$, $P(0,v) = p(v)$, $U(0,v) = \varphi(\gamma(v))$.

Так как F - первый интеграл системы (2), то $F(U(t,v), X(t,v), P(t,v)) = 0$.

В силу свойств локального потока, существует единственное отображение $t = t(x)$, $v = v(x)$, обратное к $x = X(t,v)$ и принадлежащее классу C^1.

Положим $u(x) = U(t(x),v(x))$ для x, близких к x_0. Тогда первый интеграл примет вид $F(u(x), x, P(t(x), v(x))) = 0$.

Следовательно, утверждение теоремы о существовании решения будет доказано, если мы покажем, что

$$\frac{\partial U(t,v)}{\partial v^j} - P(t,v)\frac{\partial X(t,v)}{\partial v^j} = 0,\quad j=1,\ldots,n\text{-}1 \qquad (\#)$$

$$\frac{d}{dt}U(t,v) - P(t,v)\frac{d}{dt}X(t,v) = 0$$

Последнее равенство следует из (2). Остается проверить только (#). Пусть при фиксированном v левая часть равенства (#) обозначена через $\lambda_j(t)$. Заметим, что $\lambda_j(0)=0$.

Пусть $F = F(u, x, p)$, $u = U(t,x)$, $x = X(t,x)$, $p = P(t,x)$. Дифференцирование левой части (#) по t дает $\dot{\lambda}_j = \frac{\partial \dot{x}}{\partial v^j} - \dot{p}\frac{\partial x}{\partial v^j} - p\frac{\partial \dot{x}}{\partial v^j}$.

Замена порядка дифференцирования законна, так как $\dot{x}$, $\dot{p}$, $\dot{u}$ принадлежат классу C^1. С учетом (2) последнее соотношение принимает такой вид:

$$\dot{\lambda}_j = \frac{\partial(p\cdot F_p)}{\partial v^j} + (F_x + pF_u)\frac{\partial x}{\partial v^j} - p\frac{\partial F_p}{\partial v^j} = F_p\frac{\partial p}{\partial v^j} + F_x\frac{\partial x}{\partial v^j} + F_u p\frac{\partial x}{\partial v^j}$$

Если продифференцировать $F(U(t,v), X(t,v), P(t,v)) = 0$ по v^j, то видно, что сумма последних двух слагаемых равна $-F_u\frac{\partial u}{\partial v^j}$.

Отсюда $$\dot{\lambda}_j = -F_u\left(\frac{\partial u}{\partial v^j} - p\frac{\partial x}{\partial v^j}\right) = -F_u\lambda_j.$$

Так как $\lambda_j(t)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению и начальному условию $\lambda_j(0)=0$, то $\lambda_j(t)\equiv 0$.

Значит, $u(x) = U(t(x),v(x))$ является решением задачи (*). Кроме того, функция $u(x)\in C^2$, так как ее градиент принадлежит классу C^1. Наконец, если $F\in C^2$, так что решения системы (2) единственным образом определяются начальными условиями, то единственность решения задачи (*)) в классе C^2 следует из утверждения 3 предыдущего параграфа и только что завершенного доказательства существования. (Относительно доказательства единственности см теорему 2).

Следует упомянуть, что когда начальные данные не являются нехарактеристическими, то в общем случае решения не существует.

В некотором смысле теорема 1 в той части, которая связана с «существованием», не удовлетворительна, так как в ней идет речь о решениях класса C^2, в то время как естественнее было бы искать решения только класса C^1. Разумно поставить вопрос о возможности ослабления в теореме 1 условий дифференцируемости с тем, однако, чтобы все еще можно было получать решения класса C^1. На этот вопрос до некоторой степени можно ответить отрицательно.

Пусть задача (*) заменена задачей

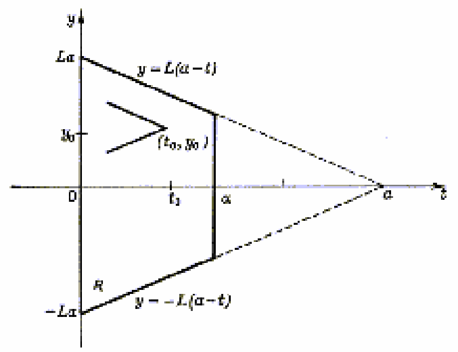
$$\partial u/\partial t + H(u,t,x,u_x) = 0,\quad u(0,x)=\varphi(x), \qquad (\#\#)$$

Из теоремы 1 следует, что если $H(u,t,x,p) \in C^2$ в открытой области E^{2+2n}, содержащей точку $(u, t, x, p) = (\varphi(0), 0, 0, \varphi_x(0))$ и $\varphi(x) \in C^2$ для x, близких к x=0, то задача (##) при малых $|t|$ и $\|x\|$ имеет единственное решение $u = u(t, x)$ класса C^2. Вопрос о единственности решений задачи (##) оказывается весьма простым.

Теорема 2. Пусть H (u, t, x, p) определена в открытом множестве E^{2+2n} содержащем точку $(u, t, x, p) = 0$, и удовлетворяет условию Липшица относительно (u, q). Пусть $\varphi(x) \in C^1$ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi_x(0) = 0$. Тогда задача (##) имеет в окрестности E^n точки $x = 0$ самое большее одно решение.

Теорема доказывается путем применения следующей ниже леммы (при $C = N =$ 0), имеющей и самостоятельный интерес, к разности $v = u_2(t, x) - u_1(t, x)$ двух решений $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$.

Лемма (Хаара).



Пусть $v = v(t, y)$ - вещественная функция класса C^1 на множестве

$$R = \{(t, y) : 0 \le t \le \alpha < a, \left|y^i\right| \le L(a - t)\}$$

$i = 1, \dots, n$, удовлетворяющая следующим условиям: $|v(0, y| \le C$,

$$|\dot{v}| \le L \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial y^k}\right| + M|v| + N,$$

где L , M>0, и $C, N \ge 0$ обозначают некоторые постоянные.

Тогда на R $|v(t, y)| \le Ce^{Mt} + N\dfrac{e^{Mt} - 1}{M}$.

Доказательство. Пусть C', N' - произвольные постоянные, причем $C < C'$ и $N < N'$. Положим $u(t, y) = C'e^{Mt} + N'\dfrac{e^{Mt} - 1}{M}$, так что $\dot{u} = L\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial y^k} + Mu + N'$.

Покажем, что на R $u(t,y) - v(t,y) > 0$, откуда предельным переходом $C' \to C, N' \to N$ получается неравенство $v(t, y) \le Ce^{Mt} + N\dfrac{e^{Mt} - 1}{M}$.

Замена v на $-v$ в этом рассуждении дает нам в итоге требуемое неравенство.

Ясно, что u - v>0 при малых t>0.

Если в R неравенство u - v>0 неверно, тогда найдется точка $(t_0, y_0) \in R$,

где $0 < t_0 \le \alpha$ такая, что неравенство u - v>0 остается справедливым в части R с условием $0 < t < t_0$, а в точке (t_0, y_0) будет иметь место равенство.
Для любого из 2^n выборов знаков ± точки интервалов
$(t, y) = (t, \pm L(t_0 - t) + y_0^1, ..., \pm L(t_0 - t) + y_0^n)$ находятся в R при $0<t<t_0$ и
$\left|\pm L(t_0 - t) + y_0^k\right| \le L(a - t)$ |, так как $\left|y_0^k\right| \le L(a - t)$. Разность u-v в точках, лежащих внутри интервалов положительна для $0 < t < t_0$ и равна нулю при $t = t_0$.
Следовательно, производная разности u - v вдоль прямых линии
$(t, \pm L(t_0 - t) + y_0^k)$ в точке $t = t_0$ неположительная. Отсюда

$$u_t - v_t + \sum_{k=1}^{n} (\pm L) \frac{\partial (u - v)}{\partial y^k} \le 0\,.$$

Так как $u_t = Mu + N'$, то $u_t = Mv + N' = M\left|v\right| + N'$ при $(t, y) = (t_0, y_0)$. Этот факт и равенство $u_y = 0$ приводят к неравенству $v_t \ge M\left|v\right| + N' + L\sum_{k=1}^{n}\left(\pm \frac{\partial v}{\partial y^k}\right)$ в точке (t_0, y_0).

Если знаки ± выбраны так, что $\pm \frac{\partial v}{\partial y^k} = \left|\frac{\partial v}{\partial y^k}\right|$ в точке (t_0, y_0), то полученное неравенство противоречит условию, так как $N' > N$. Тем самым доказываемое неравенство имеет место всюду в R, и лемма, и вместе с ней и теорема 2 доказаны.

ГЛАВА 6

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Определение. Общие предельные свойства

При наиболее общих исследованиях динамических систем представляется целесообразным отвлечься от определения динамической системы при помощи дифференциальных уравнений, ввести абстрактное определение динамической системы, которое включает все те её свойства, которые должны быть использованы при доказательстве теорем.

В качестве фазового пространства удобно использовать полное метрическое пространство.

В то же время в абстрактных динамических системах вводится ограничение: рассматриваются только системы, в которых движения определены для вещественного $-\infty < t < \infty$.

6.1.1. Определение динамической системы. Основные свойства

Динамической системой (потоком) на метрическом пространстве M называется семейство отображений $F: R\times M \to M$ ($F(t,\ x)$), которое любой точке $x \in M$ и любому вещественному числу $-\infty < t < \infty$ ставит в соответствие некоторую определенную точку $F(t,x) \in M$. Параметр t называется временем. На семейство отображений налагаются следующие условия:

I. $F(0,x) = x$;

II. $F(t,x)$ - непрерывна по совокупности переменных;

III. $F(t_1, F(t_2,x)) = F(t_1 + t_2, x)$ (свойство группы).

Из свойств I и III следует существование обратного преобразования к преобразованию $F(t,x)$. Таковым является преобразование $F(-t,x)$, так как оно удовлетворяет $F(-t,(F(t,x)) = F(0,x) = x$. Функцию $F(t,x)$ при фиксированном x мы будем называть движением, множество точек $\{F(t,x): -\infty < t < \infty\}$ будем называть *траекторией* этого движения и обозначать символом $F(I,\ x)$, аналогично множества $\{F(t,x): 0 \le t < \infty\}$, ($\{F(t,x): -\infty < t \le 0\}$) будем называть соответственно *положительной* и *отрицательной полутраекториями* (обозначения $F(I_+,x)$ и $F(I_-,x)$).

Наконец, *конечной дугой траектории* мы назовём множество точек $\{F(t,x): t_1 \le t \le t_2\}$, где x фиксирована и ее обозначение $F(t_1,t_2;x)$

(t_2 - t_1 назовём *временной длиной* этой дуги траектории).

В динамической системе могут существовать такие движения, у которых для всех значений t выполнено $F(t,x)=x$. Точку x, которой соответствует подобное «движение», будем называть ***точкой покоя***.

Если для какого-нибудь движения имеет место равенство $F(t+T, x)= F(t,x)$, то такое движение назовем ***периодическим***, допускающим период T и наименьшее положительное T, для которого $F(t+T, x)= F(t,x)$ называется периодом $F(t,x)$. Если у периодического движения такого наименьшего периода не существует, то $F(t,x)$ сводится к покою. Легко видеть, пользуясь свойством III, что периодическое движение допускает в качестве периодов наряду с T также все числа kT, где $k=\pm 1, \pm 2,...$. Траектория периодического движения с периодом T есть, очевидно, простая замкнутая линия - взаимно однозначный и непрерывный образ отрезка числовой оси $[0, T]$, у которого отождествлены точки 0 и T.

Множество A называется ***инвариантным*** по отношению к динамической системе $F(t,x)$, если при всех преобразованиях группы оно переходит в себя, т.е. удовлетворяет условию $F(t, A)=A$.

Очевидно, каждая целая траектория представляет инвариантное множество. Множество, являющееся объединением любого множества траекторий, есть также инвариантное множество. В частности, всё пространство M также является инвариантным множеством.

Таким образом, инвариантное множество есть множество, составленное из целых траекторий, и обратно.

Из непрерывности потока следует, что замыкание инвариантного множества инвариантное множество. В частности, множество всех точек покоя есть замкнутое множество.

Утверждение 1. Ни одна траектория не входит в точку покоя при конечном значении t.

Действительно, допустим, что $F(t_1, x)=x_0$, $x \neq x_0$ и x_0 –точка покоя, тогда $F(-t_1, x_0)=x$, что противоречит определению точки покоя.

Утверждение 2. Если существует $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t,x)=y$, то y - точка покоя.

Действительно, для любого t_1

$$y=\lim_{t\to+\infty} F(t+t_1,x)=\lim_{t\to+\infty} F(t_1,F(t,x))=F(t_1,\lim_{t\to+\infty} F(t,x))=F(t_1,y)\cdot$$

Аналогичное справедливо при $t\to-\infty$.

6.1.2. Устойчивость по Лагранжу

В этом пункте рассмотрим основные свойства предельных множеств траектории $F(t,x)$.

Определение. ω - предельной (α - предельной) точкой траектории $F(I, x)$ называется любая предельная точка полутраектории $F(I_+,x)$ ($F(I_-,x)$)

Утверждение 1. Множество Ω_x (A_x) всех ω - предельных (α - предельных) точек движения $F(t,x)$ есть инвариантное замкнутое множество.

Действительно, инвариантность множества Ω_x следует из

$$F(t',y)=\lim_{t_n\to+\infty}F(t'+t_n,x)=\lim_{t_n\to+\infty}F(t',(F(t_n,x)),$$

выполненного для любой последовательности t_n, такой , что

$$y=\lim_{t_n\to+\infty}F(t_n,x)\in\Omega_x.$$

Замкнутость множества вытекает из определения предельной точки.

Всегда имеют место соотношения: $\Omega_x\subset\overline{F(I_+,x)}$, $A_x\subset\overline{F(I_-,x)}$, так как замыкание полутраектории содержит все её предельные точки.

Для точек покоя $\Omega_x=A_x=x$, для периодических движений $\Omega_x=A_x=F(I,x)$.

Определение. Движение $F\,(t,x)$ называется ***положительно*** (***отрицательно***) ***устойчивым по Лагранжу***, если замыкание полутраектории $F(I_+,x)$ ($F(I_-,x)$) является бикомпактным множеством. Движение одновременно положительно и отрицательно устойчивое по Лагранжу называется ***устойчивым по Лагранжу.***

Очевидно, если пространство M бикомпактно, то все движения устойчивы по Лагранжу. Из определения непосредственно следует, что точки покоя и периодические движения устойчивы по Лагранжу. В случае евклидового пространства E^n устойчивость по Лагранжу означает, что траектория находится в ограниченной части пространства E^n.

Далее, из определения следует, что для положительно (отрицательно) устойчивого по Лагранжу движения $F\,(t,x)$ множество Ω_x (A_x) не пусто.

Обратное утверждение несправедливо.

Утверждение 2. Если $F\,(t,x)$ положительно устойчиво по Лагранжу, то
$\lim\limits_{t\to+\infty}d(F(t,x),\Omega_x)=0$.

Допустим, что утверждение неверно; тогда найдётся последовательность положительных чисел $\{t_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n)=+\infty$ и число $\alpha>0$ такое, что $d(F(t_n,x),\Omega_x)\ge\alpha>0$. Выбирая из последовательности $\{F(t_n,x)\}$ сходящуюся

$y \in \Omega_x$ подпоследовательность, получаем противоречие, которое и доказывает утверждение.

Аналогичное утверждение имеет место для движений, отрицательно устойчивых по Лагранжу.

Теорема . Если $F(t,x)$ положительно устойчиво по Лагранжу, то множество Ω_x связно.

Доказательство. Допустим, что Ω_x не связно. Тогда, так как оно замкнуто, мы имели бы $\Omega_x = U \cup V$, где U и V замкнутые непустые множества без общих точек и, следовательно, так как множество Ω_x является бикомпактным то $d(U,V) = \alpha > 0$. Так как $U \subset \Omega_x$ и $V \subset \Omega_x$, то найдутся значения t_n' и t_n'', сколь угодно большие, такие, что $d(F(t_n', x), U) \le \alpha/3$ и $d(F(t_n'', x), V) \le \alpha/3$.

Можно выбрать последовательность так, чтобы выполнялись неравенства
$0 < t_1' < t_1'' < t_2' < t_2'' < \ldots < t_{n-1}'' < t_n' < t_n'' < \ldots$.

Так как $d(F(t,x),U)$ непрерывная функция от t, мы имеем: $d(F(t_n', x), U) \le \alpha/3$ и $d(F(t_n'', x), U) \ge d(U,V) - d(F(t_n'', x), V) \ge 2\alpha/3$, то найдётся такое значение τ_n $(t_n' < \tau_n < t_n'')$, что $d(F(\tau_n, x), U) = \alpha/2$.

Из последовательности точек $\{F(\tau_n, x)\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке y, имеем : $y \in \Omega_x$; $d(y,U) = \alpha/2$; $d(y,V) \ge d(U,V) - d(y,U) = \alpha/2$; т.е. $\Omega_x \ne U \cup V$. Противоречие доказывает, что Ω_x связно.

Заметим, что если M бикомпактно, для любой точки $x \in M$ множества Ω_x и A_x не пусты и связны.

Задача. Верно ли утверждение: если $F(t,x)$ положительно устойчиво по Лагранжу, то множество Ω_x линейно связно.

Задача. Рассмотреть поток, порожденный системой

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x(1-x^2) - y(1-x^2)^2}{(1+x^2)(1+r)}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{1+r} + \dfrac{x}{1-x^2} \cdot \dfrac{1}{1+r} \end{cases}$$

в полосе $-1<x<1$, и $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = \pm 1$ на границе полосы. Здесь

$r = \exp(\arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})$.

ω-и α- предельные точки называются ***динамическими предельными точками потока.*** По своему отношению к динамическим предельным точкам движения $F\ (t,x)$ в локально-бикомпактном пространстве естественно классифицируются следующим образом.

1. Если множество Ω_x (A_x) пусто, то точка x (и траектория $F(t,x)$) называется *уходящей в положительном* (*отрицательном*) *направлении*. Если $\Omega_x \cup A_x$ пусто, то траектория называется *уходящей*.

2. Если множество Ω_x (A_x) не пусто, но $\Omega_x \cap F(I_+, x) = \varnothing$ ($A_x \cap F(I_-, x) = \varnothing$), то траектория называется *положительно* (*отрицательно*) *асимптотической*.

3. Случаи, когда $\Omega_x \cap F(I_+, x) \neq \varnothing$ или $A_x \cap F(I_-, x) \neq \varnothing$, приводят к классу движений, устойчивых по Пуассону.

Первыми двумя типами мы заниматься не будем, займёмся сейчас третьим типом.

6.1.3. Устойчивость по Пуассону

Определение. Точка x называется ***положительно*** (***отрицательно***) ***устойчивой по Пуассону*** (обозначение: устойчивая P_+ (P_-)), если для любой окрестности U точки x и для любого $T > 0$ найдётся значение $t>T$ ($t <-T$) такое, что $F(t,x) \in U$.

Точка, устойчивая по Пуассону как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$, называется (просто) ***устойчивой по Пуассону*** (устойчивая P).

Можно сказать, таким образом, что точка x устойчива P_+, если найдутся сколь угодно большие значения t, при которых точка оказывается в любой окрестности своего начального положения, или что $x \in \Omega_x$. Таким образом, здесь, действительно, осуществляется 3-й случай (см. конец п.6.1.3).

Утверждение 1. Если точка x устойчива P_+, то всякая точка траектории $F\ (t,x)$ тоже устойчива P_+.

Для доказательства заметим, что данное выше определение устойчивости P_+ равносильно следующему: существует последовательность значений $\{t_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} F(t_n, x) = x$.

В самом деле, из последнего свойства первое следует непосредственно; обратно, если первое свойство выполнено, то для любой последовательности $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > ... > \varepsilon_n > ...$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ найдутся числа $t_n > n$ такие, что

$d(F(t_n,x),x)<\varepsilon_n$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} F(t_n,x) = x$, т.е. выполняется второе определение.

Рассмотрим теперь произвольную точку траектории $F\,(t,x)$. В силу II свойства динамической системы имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} F(t+t_n,x) = F(t,x)$, т.е. точка $F\,(t,x)$ устойчива P_+. Утверждение доказано.

Аналогичное утверждение имеет место для устойчивости P_- и устойчивости P. Таким образом, в дальнейшем мы будем говорить о движении и траекториях, положительно, отрицательно и просто устойчивых по Пуассону.

Условие, что $F\,(t,x)$ устойчиво P_+, очевидно, может быть записано так: $F(I,x)\subset \overline{F(I_+,x)}$ условие устойчивости P_-: $F(I,x)\subset \overline{F(I_-,x)}$. Выполнение обоих условий одновременно эквивалентно устойчивости P.

Очевидно, что точка покоя и периодическое движение представляют движения, устойчивые P.

Пример 1. Простейший пример устойчивого P движения, отличного от покоя и периодического движения, есть движение на поверхности тора
$T^2 = \{0\le\varphi_1<1, 0\le\varphi_2<1, (\varphi_1+k,\varphi_2+k')\equiv(\varphi_1,\varphi_2),$ если k и k' целые$\}$,
определяемое дифференциальными уравнениями: $\dot\varphi_1 = 1$, $\dot\varphi_2 = \alpha$,
где α - положительное иррациональное число (иррациональная обмотка тора). Здесь траектория каждого движения всюду плотна на торе; каждое движение устойчиво P, множества Ω_x и A_x для всякой точки $x\in T^2$ совпадают с поверхностью тора.

Пример 2. Определим движения на торе уравнениями

$$\dot\varphi_1 = \psi(\varphi_1,\varphi_2),\ \dot\varphi_2 = \alpha\psi(\varphi_1,\varphi_2),$$

где $\psi(\varphi_1,\varphi_2)$ - непрерывная функция на торе (периодическая по аргументам φ_1,φ_2 с периодом 1), всюду положительная, кроме точки (0, 0), где $\psi(0,0)=0$, и удовлетворяющая условиям Липшица. Кривые, по которым совершаются движения, остались те же, что и в иррациональной обмотке тора, так как они определяются дифференциальным уравнением $\dfrac{d\varphi_1}{1} = \dfrac{d\varphi_2}{\alpha}$, но характер движения изменился. На кривой $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$ имеют место три движения: 1) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ (покой); 2) движения по положительной дуге:
$0<\varphi_1<\infty$; для этих движений положительная полутраектория всюду плотна на торе и поэтому устойчива P_+, отрицательная полутраектория при $t\to-\infty$

стремится к точке покоя (0, 0), она неустойчива P_-; 3) движения по отрицательной дуге: $-\infty < \varphi_1 < 0$; они устойчивы P_- и неустойчивы P_+, так как движущаяся точка при $t \to +\infty$ стремится к точке покоя.

Все остальные траектории остались те же, что в иррациональной обмотке тора, так как вдоль них $\psi(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0$; они всюду плотны на T^2, следовательно, устойчивы P в обе стороны; однако движения по этим траекториям уже неравномерные - скорость равна $\psi(\varphi_1, \varphi_2)\sqrt{1+\alpha^2}$, движение замедляется при прохождении около точки (0,0).

Задача. Построить систему, обладающую: движениями, устойчивыми P (включая точки покоя), и движениями, неустойчивыми P ни в одну сторону**.**

Обратимся к изучению структуры множеств Ω_x и A_x для движений, устойчивых P.

Если $F(t,x)$ устойчиво P_+, то, в силу утверждения 1, все точки его траектории являются для него ω - предельными, т.е. $F(I,x) \subset \Omega_x$.

Так как Ω_x замкнутое множество, из последнего включения следует:

$\overline{F(I,x)} \subset \Omega_x$.

Так как, всегда имеет место $\overline{F(I,x)} \supset \Omega_x$ то, для движения, устойчивого P_+:

$\overline{F(I,x)} = \Omega_x$, и $A_x \subset \overline{F(I,x)}$. Отсюда следует:

Утверждение 2. 1) Для движения $F(t,x)$ устойчивого P_+ имеем:

$$A_x \subset \Omega_x = \overline{F(I,x)}.$$

2) Для движения $F(t,x)$ устойчивого P_- имеем: $\Omega_x \subset A_x = \overline{F(I,x)}$.

3) Если движение $F(t,x)$ устойчиво P то $\Omega_x = A_x = \overline{F(I,x)}$.

Мы видели в предыдущем пункте, что для покоя и периодического движения, которые являются устойчивыми P, имело место соотношение $F(I,x) = \overline{F(I,x)}$.

С другой стороны, в примерах 1 и 2 настоящего пункта замыкание траектории, устойчивой P, содержало, кроме точек самой траектории, также другие точки. Этот факт является общим, если траектория отлична от точки покоя и периодической траектории. Надо только наложить дополнительное ограничение на пространство M. Здесь существенно, чтобы пространство было полным.

Теорема. Для траектории движения $F(t,x)$ устойчивой P_+, не являющейся точкой покоя или замкнутой кривой (траекторией периодического движения) и и расположенной в полном метрическом пространстве *M*, в множестве Ω_x всюду плотны точки, не принадлежащие траектории *F*(*t*,*x*) т.е.

$$\overline{\overline{F(I,x)} \setminus F(I,x)} = \overline{\overline{F(I,x)}} = \Omega_x .$$

Так как в силу группового свойства любая точка *x* траектории является начальной для некоторого движения, то достаточно доказать, что в любой замкнутой окрестности $\overline{B(x,\varepsilon)}$ $(\varepsilon > 0)$ найдётся точка $y \in \overline{F(I,x)}$, не лежащая на траектории *F* (*t*,*x*).

В условиях теоремы всякая конечная дуга $F(t_1,t_2;x)$ нигде не плотна в *F* (*t*,*x*)

В самом деле, $F(t_1,t_2;x)$ есть замкнутое бикомпактное множество. Какое бы относительно открытое множество $U \subset \overline{F(t,x)}$ мы ни взяли, множество $U \setminus (U \cap F(t_1,t_2;x))$ будет непустым относительно открытым множеством, не имеющим общих точек с $F(t_1,t_2;x)$, а это и есть условие неплотности.

Для доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему Бэра (п.0.2.3).

§ 2. Центральные движения

6.2.1. Центр Биркгофа

Введём принадлежащее Биркгофу понятие возвращаемости областей.

Определение. Динамическая система *F*(*t*,*x*), определённая в некотором метрическом пространстве *M*, обладает в *M* свойством ***возвращаемости областей***, если для любой области $U \subset M$ и любого *T* найдётся значение *t* > *T* такое, что $U \cap F(t,U) \neq \varnothing$.

Применяя к последнему неравенству преобразование группы с параметром -*t*, имеем также $U \cap F(-t,U) \neq \varnothing$, т.е. определение возвращаемости одновременно относится к положительным и к отрицательным значениям *t*.

В настоящем пункте мы покажем, что при весьма общих предположениях относительно динамической системы из пространства *M* можно выделить подпространство *G*, в котором будет иметь место возвращаемость областей.

Назовём точку *x* ***блуждающей***, если существуют её окрестность *U*(*x*) и положительное число *T* такие, что $U(x) \cap F(t,U(x)) = \varnothing$ для *t*>*T*.

Применяя к этому равенству преобразование с параметром -*t*, как и в предыдущем определении, получаем: $U(x) \cap F(-t,U(x)) = \varnothing$, т.е. определение блуждающей точки симметрично относительно положительных и отрицательных значений *t*.

Множество W блуждающих точек является инвариантным, так как если к точке $F(t_0,x_0)$, применяя к ней преобразование с параметром t_0:
$F(t_0,U(x)) \cap F(t,F(t_0,U(x))) = \varnothing$ для $t>T$.

Далее, это множество открытое, так как, вместе с точкой x; блуждающими являются все точки окрестности $U(x)$.

Множество неблуждающих (не блуждающих) относительно M точек

$$G_1 = M \setminus W .$$

является, таким образом, замкнутым инвариантным. Оно может быть пусто. Например, для динамической системы, определённой на E^2 уравнениями: $\dot{x} = 1, \dot{y} = 0$, все точки являются блуждающими.

Неблуждающая точка $x \in G_1$, характеризуется тем свойством, что для любой содержащей её окрестности $U(x)$ найдутся сколь угодно большие значения t, для которых $U(x) \cap F(t,U(x)) \neq \varnothing$ для $t>T$.

Если точка x устойчива P_+ или P_-, то по определению для любой $U(x)$ её содержащей найдутся сколь угодно большие по абсолютной величине значения t, для которых $U(x) \cap F(t,x) \neq \varnothing$, следовательно, и подавно выполняется $U(x) \cap F(t,U(x)) \neq \varnothing$ для $t>T$ т.е. каждая точка устойчивая P_+ или P_- является неблуждающей.

Обратное утверждение неверно.

Утверждение 1. Если динамическая система обладает хоть одним движением, устойчивым L_+ или L_-, то множество G_1 неблуждающих точек не пусто.

Пусть $F(t,x)$ устойчиво L_+; тогда множество Ω_x не пусто и бикомпактно.

Рассматривая Ω_x, как пространство движений M, мы докажем утверждение, если покажем, что в бикомпактном метрическом пространстве M множество G_1 неблуждающих движений не пусто.

Допустим, что W есть множество блуждающих точек и $G_1 = M \setminus W = \varnothing$. Тогда для каждой точки $x \in M$ найдётся такая окрестность $U(x)$, что для $t>T$ выполнено соотношение $U(x) \cap F(t,U(x)) = \varnothing$. В силу бикомпактности пространства M можем выбрать из этих окрестностей конечное число $U_1,\dots,U_N$, так что $M = \bigcup_{k=1}^{N} U_k$; пусть им соответствуют числа $T_1, T_2,\dots, T_N$.

Пусть $x \in M$ произвольная точка и пусть она входит в U_{n_1}; тогда по истечении времени $\leq T_{n_1}$ она из неё выйдет навсегда; пусть она попадает в U_{n_2}; по истечении времени $\leq T_{n_2}$ она из неё выйдет навсегда и т.д. Наконец, при

$t > \sum_{k=1}^{N} T_k$ ей будет некуда деваться. Это противоречие доказывает утверждение.

В дальнейшем изложении этого пункта мы будем рассматривать движение $F(t,x)$ в бикомпактном метрическом пространстве, обладающем в силу этого счётной базой.

В силу доказанного утверждения множество G_1 не пусто и бикомпактно, как замкнутое подмножество бикомпактного пространства.

Покажем, что любое движение стремится к множеству G_1. Именно, имеет место

Утверждение 2. Если пространство M бикомпактно, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, всякое блуждающее движение $F(t,x)$, протекает только конечное время, не превышающее $T(\varepsilon)$, вне множества $B(G_1,\varepsilon)$.

В самом деле, так как M бикомпактно, а $B(G_1,\varepsilon)$ открытое множество, то $M \setminus B(G_1,\varepsilon)$ бикомпактно и всё состоит из блуждающих точек. Поэтому для каждой точки $x \in M \setminus B(G_1,\varepsilon)$ найдётся окрестность $U(x)$ такая, что для $t>T(x)$ выполнено $U(x) \cap F(t,U(x)) = \varnothing$. Повторяя рассуждение утверждения 1, мы покрываем $M \setminus B(G_1,\varepsilon)$ конечным числом этих областей $U_1,\ldots,U_N$ и, обозначая соответствующие числа $T(x)$ через $T_1, T_2,\ldots, T_N$, убеждаемся, что время пребывания точки x в $M \setminus B(G_1,\varepsilon)$ не может превышать $T(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N} T_k$. Утверждение доказано.

Дальнейшая наша задача состоит в том, чтобы ещё сузить то множество, в окрестности которого по преимуществу протекают движения блуждающих точек. На этом пути Биркгоф приходит к понятию ***центра***.

Рассмотрим множество неблуждающих точек из G_1, как пространство новой динамической системы. Это пространство бикомпактно, и в нём по предыдущему можно определить замкнутое инвариантное непустое множество G_2, точек не блуждающих по отношению к G_1. Продолжая этот процесс, мы получим цепь вложенных друг в друга замкнутых множеств упорядоченных по убыванию. По лемме Цорна (п. 0.1.1) найдется минимальный элемент. Обозначим его символом G. Очевидно, что G бикомпактное инвариантное множество. Множество G - есть множество ***центральных движений*** (***центр Биркгофа*** (G. D. Birkhoff)).

Пример. Рассмотрим на плоскости динамическую систему, определяемую системой уравнений $\begin{cases} \dot{x} = [-y + x(1-x^2-y^2)][(x-1)^2+y^2], \\ \dot{y} = [x + y(1-x^2-y^2)][(x-1)^2+y^2], \end{cases}$

или, в полярных координатах $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, ($r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $\theta + 2\pi k \cong \theta$, k- целое)

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r)(1+r^2-2r\cos\theta), \\ \quad \dot{\theta} = 1+r^2-2r\cos\theta. \end{cases}$$

На окружности r =1 существуют две траектории движения: точка покоя $r = 1,\ \theta = 0$ и движение по дуге: $r = 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi$, определяемое уравнением: $\theta(t) = 2\text{arcctg}(\text{ctg}(\theta/2)\text{-}t)$; причём $\lim\limits_{t\to-\infty}\theta(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t) = 2\pi$.

Точки области $U = \{0 < r < 1\}$ все являются блуждающими, так как они приближаются к r= 0 и к r=1 соответственно при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, т.е. каждая точка оставляет навсегда свою достаточно малую окрестность $U(x)$. Точка r = 0, как точка покоя, неблуждающая. Все точки окружности r=1 тоже неблуждающие, так как в любой окрестности $U(x)$ такой точки найдутся точки, не лежащие на окружности r= 1, и, следовательно, при возрастании t, когда полярный угол θ увеличится на величину, кратную 2π, эти точки ещё более приблизятся к дуге r = 1 и будут снова и снова пересекать $U(x)$. Таким образом, G_1 состоит из точки r = 0 и окружности r = 1.

Рассмотрим теперь движения только на множестве G_1. Точки покоя: r= 0 и r=1, $\theta = 0$, очевидно, неблуждающие; всякая другая точка x, с координатами: r=1, $\theta = \theta_0 \neq 0(\text{mod}(2\pi))$ является блуждающей, так как она имеет предельные положения при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$ и навсегда оставляет свою относительную окрестность $U(x)$, если последняя не содержит точки покоя.

Тот же самый результат, очевидно, получится при последующем процессе выделения относительно неблуждающих точек. Таким образом, $G = G_2$ состоит только из двух точек покоя.

Мы видели, что всякая траектория, устойчивая P_+ или P_-, принадлежит B_1. Так как все её точки неблуждающие по отношению к пространству самой траектории, то она войдёт и в G_2. Используя лемму Цорна индукции легко доказывается, что всякая траектория, устойчивая P хоть в одну сторону, войдёт в множество центральных движений G, которое может быть определено как наибольшее замкнутое множество, все точки которого являются неблуждающими по отношению к этому множеству, или, что то же, как наибольшее замкнутое множество, в котором имеет место возвращаемость для замкнутое множество, в котором имеет место возвращаемость для любой относительной области.

Структура множества G выясняется следующей теоремой.

Теорема . В множестве центральных движений G всюду плотны точки, лежащие на траекториях, устойчивых P.

Рассмотрим данную динамическую систему на множестве G. Пусть $x \in G$ - любая точка и $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Требуется доказать, что в $B(x, \varepsilon) = B$ найдётся точка, устойчивая P. Берём последовательность возрастающих положительных чисел T_n, где $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$. В силу возвращаемости областей найдётся $t_1 > T_1$ такое, что $B \cap F(t_1, B) \neq \varnothing$. Так как пересечение двух открытых множеств есть открытое множество, то найдутся точка x_1 и число $\varepsilon_1 > 0$ такие, что $B(x_1, \varepsilon_1) \subset B \cap F(t_1, B)$. Обозначим: $B_1 = B(x_1, \varepsilon_1 / 2)$. Продолжив построение, аналогичное теореме Бэра, найдем последовательность $B_n \subset B_{n-1}$(n=2, 3…) и, кроме того, $\operatorname{diam}(\overline{B}_n) \le \varepsilon / 2^{n-1}$. В силу бикомпактности пространства M мы в пересечении множеств B_n получим точку $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$.

Покажем, что точка y устойчива P_-. Пусть задано сколь угодно большое число $T > 0$ и сколь угодно малое число $\delta > 0$. Определяем натуральное число n так, чтобы одновременно было $T_{2n+1} > T$ и $\varepsilon_{2n} < \delta$.

По построению $y \in B(x_{2n+1}, \varepsilon_{2n+1})$, с другой стороны,

$B_{2n} = B(x_{2n}, \varepsilon_{2n} / 2) \subset B(y, \delta)$, так как $d(y, x_{2n}) < \varepsilon_{2n} / 2$ и $\delta > \varepsilon_{2n}$.

Таким образом, мы получаем включения:

$$y \in B(x_{2n+1}, \varepsilon_{2n+1}) \subset B_{2n} \cap F(t_{2n+1}, B_{2n}).$$

Отсюда, применяя преобразования группы с параметром $-t_{2n+1}$, будем иметь: $F(-t_{2n+1}, y) \in B_{2n} \cap F(-t_{2n+1}, B_{2n}) \subset B(y, \delta)$, причем $-t_{2n+1} < -T_{2n+1} < -T$. Устойчивость P_- точки y доказана. Аналогично доказывается её устойчивость P_+.

Примечание. В доказательстве теоремы мы использовали только свойства бикомпактности и возвращаемости областей множества M. Теорема имеет поэтому место, если вместо M взять любое бикомпактное множество, обладающее свойством возвращаемости областей.

На основании теоремы и предшествующего ей замечания вполне выясняется структура множества G. А именно, множество центральных движений в бикомпактном пространстве есть замыкание множества точек, лежащих на всех траекториях, устойчивых P.

Задача. Доказать, что в множестве центральных движений G точки, расположенные на траекториях устойчивых P, образуют множество второй категории, т.е. его дополнение может быть представлено как сумма счётного числа замкнутых множеств (возможно, пустых), неплотных в G.

Указание. Доказать, что множества $F_k = \{x \in G : F(t,x) \cap B(x,\varepsilon_k) = \varnothing\}$ для $t > T_k$ ($T_k \to +\infty, \varepsilon_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$) замкнуты, нигде не плотны и каждая точка неустойчивая P_+ входит в некоторое F_k, т.е. множество точек неустойчивых P_+ есть множество второй категории в смысле Бэра.

6.2.2. Минимальный центр притяжения (*Центр Хильми*)

В этом пункте мы будем иметь дело с понятием «вероятности нахождения точки $F(t,x)$ в множестве E» при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Под этим мы понимаем следующее. Рассмотрим дугу траектории $F(0,T;x)$ и множество тех значений $t \in [0,T]$, для которых $F(t,x) \in E$; пусть мера этого множества есть

$\tau = \tau(x;T,E) = \int\limits_0^T \chi_E(F(s,x))ds$, где χ_E - характеристическая функция множества E, т.е.

$$\chi_E(x) = 1 \text{ при } x \in E;$$
$$\chi_E(x) = 0 \text{ при } x \notin E.$$

Множества E, которые мы будем рассматривать здесь, суть замкнутые или открытые множества, поэтому множества значений t, для которых $F(t,x) \in E$; как легко видеть, будут измеримы.

Отношение $\frac{\tau}{T}$ естественно назвать относительным временем пребывания точки x в множестве E в течение промежутка времени [0, T]. Очевидно,

$$0 \le \frac{\tau}{T} \le 1.$$

Если существует $\lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \chi_E(F(s,x))ds = \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{\tau(x;T,E)}{T} = \mathrm{P}^+(F(t,x) \in E)$,

то этот предел мы будем называть ***вероятностью нахождения точки*** x ***в множестве*** E при $t \to +\infty$.

Аналогично определится вероятность пребывания x в E при $t \to -\infty$: $\mathrm{P}^-(F(t,x) \in E)$. В дальнейшем мы будем, для определённости, рассматривать лишь случай $t \to +\infty$ и, для простоты письма, будем опускать значок + у Р. Если Р не существует, то существует нижняя вероятность

$$\underline{\mathrm{P}}^{+}(F(t,x)\in E)=\lim_{T\to+\infty}\inf\frac{\tau}{T}$$

и верхняя вероятность $\overline{\mathrm{P}}^{+}(F(t,x)\in E)=\lim_{T\to+\infty}\sup\frac{\tau}{T}$, причём $0\le\underline{\mathrm{P}}^{+}<\overline{\mathrm{P}}^{+}\le 1$.

Замечая, что $\tau(x;T,E)$ есть мера, мы легко получаем следующие равенства и неравенства:

1) Если $A\subset B$, то $\mathrm{P}(F(t,x)\in A)\le\mathrm{P}(F(t,x)\in B)$ и аналогичные неравенства для $\underline{\mathrm{P}}$ и $\overline{\mathrm{P}}$.

2) $\mathrm{P}(F(t,x)\in A\cup B)\le\mathrm{P}(F(t,x)\in A)+\mathrm{P}(F(t,x)\in B)$; если $A\cap B=\varnothing$, то имеет место знак равенства.

Определение. Инвариантное замкнутое множество X называется ***центром притяжения движения*** $F(t,x)$ при $t\to+\infty$ ($t\to-\infty$), если вероятность $\mathrm{P}^{+}(\mathrm{P}^{-})$ пребывания точки x в окрестности $B(X,\varepsilon)$ множества X при любом $\varepsilon>0$ равна 1:

$$\mathrm{P}(F(t,x)\in B(X,\varepsilon))=1.$$

Если множество X не допускает истинного подмножества, тоже являющегося центром притяжения, то X называется ***минимальным центром притяжения*** (***центром Хильми***) (Г. Ф. Хильми).

Теорема 1. Если движение $F(t,x)$ положительно (отрицательно) устойчиво по Лагранжу, то существует минимальный центр притяжения, для $F(t,x)$ при $t\to+\infty$ ($t\to-\infty$).

Доказательство. Докажем теорему для движения $F(t,x)$, положительно устойчивого по Лагранжу. В силу определения устойчивости по Лагранжу существует бикомпактное множество F_1 такое, что $F(I_+,x)\subset F_1=\overline{F(I_+,x)}$.

В силу бикомпактности множество F_1 может быть покрыто конечным числом открытых множеств $U_k^{(1)}$ диаметра < 1: $F_1\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n_1}U_k^{(1)}$.

Так как, очевидно, $\mathrm{P}(F(t,x)\in F_1)=1$, то существуют замкнутые множества $\overline{U_k^{(1)}}$, для которых $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x)\in\overline{U_k^{(1)}})>0$, потому что, если бы для всех k было $\mathrm{P}(F(t,x)\in\overline{U_k^{(1)}})=0$, то мы получили бы противоречие с равенством $\mathrm{P}(F(t,x)\in F_1)=1$. Обозначим через $F_2=\bigcup\limits_{k=1}^{n_1}U_k^{(1)}$ объединение множеств $U_k^{(1)}$, для которых имеет место $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x)\in\overline{U_k^{(1)}})>0$; это множество замкнутое. Вероятность пребывания точки x в $F_1 \backslash F_2$ равна нулю в силу свойств 2) и 1); следовательно, на основании свойства 2) имеем: $\mathrm{P}(F(t,x)\in F_2)=1$.

Далее построение проводим по индукции.

Если множество F_m с указанными свойствами уже определено, то покрываем его конечным числом относительно открытых множеств $U_k^{(m)}$ диаметра $< 1/2^{m-1}$: $F_m \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n_1} U_k^{(m)}$ и выбираем из них те, для которых $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x)\in\overline{U_k^{(m)}})>0$.

В качестве множества $F_{m+1}=\bigcup\limits_{k=1}^{n_1} U_k^{(m)}$ выбираем объединение множеств $U_k^{(m)}$, для которых имеет место $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x)\in\overline{U_k^{(1)}})>0$; это множество замкнутое. Вероятность пребывания точки x в $F_m \backslash F_{m+1}$ равна нулю в силу свойств 2) и 1); следовательно, на основании свойства 2) имеем: $\mathrm{P}(F(t,x)\in F_{m+1})=1$.

Мы получаем, таким образом, счётную последовательность замкнутых бикомпактных множеств $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$.

Их пересечение (непустое, бикомпактное) обозначим через X (или через X_x, если нужно показать его зависимость от точки x): $X=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Докажем, что X есть минимальный центр притяжения.

Прежде всего, легко показать, что множество X удовлетворяет условию $\mathrm{P}(F(t,x)\in B(X,\varepsilon))=1$. В самом деле, для заданного $\varepsilon>0$ найдётся такое n, что $F_n \subset B(X,\varepsilon)$. Так как по построению $\mathrm{P}(F(t,x)\in F_n)=1$, то в силу свойства 1) для любого $\varepsilon>0$ получим $\mathrm{P}(F(t,x)\in B(X,\varepsilon))=1$.

Рассмотрим далее некоторые свойства множества X. Если для $y\in M$ существует $\eta>0$ такое, что $\mathrm{P}(F(t,x)\in B(y,\eta))=0$, то $y\in M \setminus X$. В самом деле, определим n так, что $\dfrac{1}{2^n}<\eta$. Если F_{n-1} не содержит y, то утверждение доказано; если $y\in F_{n-1}$, то всякое множество $U_k^{(n-1)}$, содержащее точку y, находится внутри $B(y,\eta)$; в силу свойства 1) для него $\mathrm{P}(F(t,x)\in U_k^{(n-1)})=0$, т.е. такое $U_k^{(n-1)}$ не войдёт в F_n, а значит $y\in M \setminus F_n \subset M \setminus X$.

Обратно, если для любого $\varepsilon>0$ выполнено $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x)\in B(y,\varepsilon))>0$, то $y\in X$ очевидно, в силу построения множеств F_n.

Таким образом, множество X можно определять как множество точек $y\in M$, в которых для любого $\varepsilon>0$ имеет место $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x)\in B(y,\varepsilon))>0$.

Этим доказана независимость X от выбора $U_k^{(n)}$. Покажем, что X есть инвариантное множество. Пусть $y \in X$, покажем, что для любого t_0 имеем также $F(t_0, y) \in X$. Фиксируем t_0, выбираем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности потока для $\varepsilon > 0$ и t_0 можно найти такое $\delta > 0$, что
$F(t_0, B(y,\delta)) \subset B(F(t_0, y), \varepsilon)$.

Так как $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x) \in B(y,\delta)) = \lim\limits_{T\to+\infty} \sup \dfrac{\tau(x,T,B(y,\delta))}{T} > 0$, то

$$\tau(x,T,B(F(t_0,y),\varepsilon)) \geq \tau(x,T,(F(t_0,(B(y,\varepsilon)));$$

из того что, если $F(t,x) \in B(y,\delta)$, то $F(t+t_0,x) \in F(t_0,B(y,\delta))$.

Таким образом, $\qquad \tau(x,T,F(t_0,B(y,\delta))) \geq \tau(x,T,B(y,\delta)) - |t_0|$,

и мы получаем:

$$\lim_{T\to+\infty} \sup \frac{\tau(x,T,B(F(t_0,y),\varepsilon))}{T} \geq \lim_{T\to+\infty} \sup \frac{\tau(x,T,B(y,\delta)) - |t_0|}{T} > 0,$$

т.е. точка $F(t_0, y) \in X$. Инвариантность множества X доказана.

Таким образом, установлено, что X есть центр притяжения.

Остаётся доказать, что X есть минимальный центр притяжения. Допустим, что существует X', истинная часть множества X, являющаяся центром притяжения. Множество $X \setminus X'$ не пусто, и для точки $y \in X \setminus X'$ имеем: $d(y, X') = \alpha > 0$. Берём $0 < \varepsilon < \alpha/2$.

Множества $B(X',\varepsilon)$ и $B(y,\varepsilon)$ не имеют общих точек. По предположению $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x) \in B(X',\varepsilon)) = 1$, поэтому в силу свойства 2) $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x) \in B(y,\varepsilon)) = 0$, что противоречит $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x) \in B(y,\varepsilon)) > 0$, так как $y \in X$.

Теорема доказана.

Теорема 2. В минимальном центре притяжения индивидуального движения $F(t,x)$ имеет место возвращаемость областей.

Доказательство. Допустим, что теорема не верна. В таком случае в минимальном центре притяжения X найдётся относительная область U такая, что $U \cap F(t,U) = \varnothing$ для $t > t_0 > 0$. Так как U есть относительная область, то для всякой точки $y \in U$ найдётся такое $\alpha > 0$, что $B(y,\alpha) \cap X \subset U$. Выберем $0 < \varepsilon < \alpha/2$ и обозначим $B(y,\alpha) \cap X = U^*$.

Далее задаём произвольно малое положительное число $\eta > 0$ и выбираем положительное число T_1 так, что $\dfrac{2t_0}{T_1} < \eta$.

Для чисел $\varepsilon > 0$ и T_1 определим такое $\delta > 0$, что для всякой точки $x \in U^*$ и любой точки z, удовлетворяющей неравенству $d(x,z) < \delta$, выполняется при $0 \le t \le T_1$ неравенство $d(F(t,x), F(t,z)) < \varepsilon$.

Наконец, возьмём шаровую окрестность U' радиуса $\delta > 0$ множества U^*: $U' = B(U^*, \delta)$.

Если в момент t_1 точка $F(t_1, x) \in U'$, то существует точка $u \in U^* \subset U \subset X$ такая, что $d(F(t_1, x), u) < \delta$.

По предположению относительно U точка $F(t,u)$, принадлежащая X, будет находиться при $t \ge t_0$ вне U и, следовательно, вне $B(y, \alpha)$. В силу выбора числа $\delta > 0$ для $0 \le t \le T_1$ получим: $d(F(t + t_1, x), F(t,u)) < \varepsilon$.

Таким образом, для каждого значения t отрезка времени $0 \le t \le T_1$ мы будем иметь:

$$d(F(t+t_1, y) \ge d(F(t,u), y) - d(F(t+t_1, x), F(t,u)) > \alpha - \varepsilon > \varepsilon,$$

т.е. после каждого преобразования в области U', продолжительность которого не превышает t_0, точка $F(t,x)$ в течение времени $\ge T_1 - t_0$ находится вне $B(y, \varepsilon)$. Следовательно, $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x) \in B(y,\varepsilon)) < \dfrac{t_0}{T_1 - t_0} < \dfrac{2t_0}{T_1} < \eta$.

В силу того, что $\eta > 0$ - произвольное число, получаем:

$\overline{\mathrm{P}}(F(t,x) \in B(y,\varepsilon)) = 0$, а это противоречит свойству $\overline{\mathrm{P}}(F(t,x) \in B(y,\varepsilon)) > 0$ для точки $y \in U \subset X$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Определение. Для любого инвариантного множества $E \subset M$ ***центром притяжения*** при $t \to +\infty$ движений множества E называется замкнутое инвариантное множество X_E такое, что $\mathrm{P}(F(t,x) \in B(X_E, \varepsilon)) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$, если $x \in E$.

Если никакое истинное подмножество множества X'_E не является центром притяжения для E, то X_E есть *минимальный центр притяжения для движений E*.

Аналогично определяется минимальный центр притяжения при $t \to -\infty$. Мы займёмся только случаем при $t \to +\infty$.

Следствие 1. Если все движения инвариантного множества E положительно устойчивы по Лагранжу, то существует минимальный центр притяжения X_E.

Доказательство. Определим множество X_E как замыкание объединения минимальных центров притяжения X_x всех движений $F(t,x)$, входящих в E. Очевидно, это есть инвариантное замкнутое множество. Легко убедиться, что оно является центром притяжения для E.

В самом деле, рассмотрим любое движение $F(t,x)$ $(x \in E)$. Так как $X_x \subset X_E$, то $B(X_x, \varepsilon) \subset B(X_E, \varepsilon)$, но в силу определения X_x имеем:

$$\mathrm{P}(F(t,x) \in B(X_x, \varepsilon)) = 1,$$

а отсюда, в силу свойства 1), получим $\mathrm{P}(F(t,x) \in B(X_E, \varepsilon)) = 1$.

Покажем, что X_E есть минимальный центр притяжения для множества E. Пусть X'_E тоже является центром притяжения для E и X'_E есть истинная часть X_E. В множестве $X_E \setminus X'_E$ найдётся точка y, входящая в X_x для некоторого $x \in E$, и найдётся $\alpha > 0$ такое, что $d(y, X'_E) = \alpha > 0$. Повторяя рассуждения в конце доказательства теоремы 1, получаем, что $\mathrm{P}(F(t,x) \in B(y, \varepsilon)) = 0$ при $\varepsilon < \alpha / 2$, а это противоречит условию $y \in X_x$.

Следствие доказано.

Следствие 2. В минимальном центре притяжения X_E множества E имеет место возвращаемостъ областей.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует относительная область $U \subset X_E$ такая, что $U \cap F(t,U) = \varnothing$ при $t > t_0$. Далее, найдётся такая точка $x \in E$, что её центр притяжения X_x пересекается с U, т.е. $X_x \cap U = U_x \neq \varnothing$.

U_x есть относительная область множества X_x, и так как $U_x \subset U$, то имеет место соотношение $U_x \cap F(t, U_x) = \varnothing$ при $t > t_0$, но это противоречит теореме 2. Следствие доказано.

Возникает вопрос, не будет ли всегда множество центральных движений исчерпываться объединением множеств X_M для $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$.

Отрицательный ответ на этот вопрос даёт следующий пример, построенный В. В. Степановым.

Пример. Мы возьмём в качестве бикомпактного пространства M поверхность тора $T^2 = \{0 \le \varphi_1 < 1, 0 \le \varphi_2 < 1, (\varphi_1 + k, \varphi_2 + k') \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$, если k и k' целые$\}$, Определим движения на торе уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \psi(\varphi_1, \varphi_2)\,,\ \dot{\varphi}_2 = \alpha\psi(\varphi_1, \varphi_2)\,,$$

где $\psi(\varphi_1, \varphi_2)$ - непрерывная функция на торе (периодическая по аргументам φ_1, φ_2 с периодом 1), всюду положительная кроме точки (0, 0), где $\psi(0,0) = 0$, и удовлетворяющая условиям Липшица. Дополнительно предположим, что $\iint\limits_{T^2} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2}{\psi(\varphi_1, \varphi_2)} = +\infty$, например $\psi(\varphi_1, \varphi_2) = \sin^2 \pi\varphi_1 + \sin^2 \pi\varphi_2$.

В рассматриваемом случае множество центральных движений совпадет со всей поверхностью тора. Между тем мы покажем, что для любого $x \in T^2$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(F(t,x) \in B(O,\varepsilon)) = 1,$$

где O=(0,0), т.е. минимальный центр притяжения как при $t \to +\infty$ так и при $t \to -\infty$ состоит из одной точки O.

Лемма. Если $f(x)$ интегрируемая по Риману функция периода 1 и α - иррациональное число, то при любом x_0

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_0 + k\alpha) = \int_0^1 f(s)ds\,.$$

Для доказательства этой леммы достаточно оценить, сколько точек вида $(k\alpha)$, где k =0,1,…,N-1, $(k\alpha)$ - дробная часть числа $k\alpha$, попадет в полуинтервал $\left[\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}\right)$ длины 1/m, с учетом того, что для иррационального числа α существуют рациональные дроби p/q со сколь угодно большим знаменателем q таким, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. Мы ее докажем в главе 8 (п.8.2.3) в более общей ситуации для непрерывных функций ограниченной вариации.

Переходим к доказательству утверждения относительно движений на T^2. Формула $\mathrm{P}(F(t,x) \in B(O,\varepsilon)) = 1$, очевидно, верна: если x = 0; или, при $t \to +\infty$, если x лежит на траектории $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$, $\varphi_1 < 0$;
$t \to -\infty$, если x лежит на траектории $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$, $\varphi_1 > 0$. Останавливаясь для определённости на случае $t \to +\infty$, рассмотрим теперь движение по траектории: $\varphi_2 = \varphi_{2,0} + \alpha\varphi_1$, $\varphi_{2,0} \neq -k\alpha(\mathrm{mod}\ 1)$ ($k \in Z$). Соответствующие движения

устойчивы P. Выберем произвольное положительное число $0<\delta<\dfrac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$ и пусть $C=B(O,\delta)$, причём расстояние между точками

$(\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)})$ и $(\varphi_1^{(2)},\varphi_2^{(2)})$ определяем, как $\sqrt{\{\varphi_1^{(1)}-\varphi_1^{(2)}\}^2+\{\varphi_2^{(1)}-\varphi_2^{(2)}\}^2}$

(где символ $\{y\}$ обозначает абсолютно наименьший вычет числа y по модулю 1, т.е. ($-1/2<\{y\}\le 1/2$ и y=$\{y\}$+k- целое).

Подсчитаем $\tau=\tau(\varphi_{2,0};T,C)$ - меру времени из промежутка [0,T], в течении которого точка движущаяся по траектории $\varphi_2=\varphi_{2,0}+\alpha\varphi_1$, находится в C.

Пусть $m(\delta)>0$ есть минимум функции $\psi(\varphi_1,\varphi_2)$ на T^2\\$C$, $\chi(\varphi_1,\varphi_2)$- характеристическая функция C. Определим функцию

$$g(\varphi_{2,0})=\int_0^1\frac{\chi(s,\varphi_{2,0}+\alpha s)}{\psi(s,\varphi_{2,0}+\alpha s)}ds$$

Эта функция определена и непрерывна для всех $\varphi_{2,0}\neq -0(\text{mod } 1)$, имеет период 1 и равна нулю вне интервала $-\delta\sqrt{1+\alpha^2}<\varphi_{2,0}<\delta\sqrt{1+\alpha^2}$.

В окрестности точки $\varphi_{2,0}=0$ она не ограничена, так как

$$\int_{-1/2}^{1/2}g(\varphi_{2,0})d\varphi_{2,0}=\iint_{T^2}\frac{\chi(\varphi_1,\varphi_2)}{\psi(\varphi_1,\varphi_2)}d\varphi_1 d\varphi_2=\iint_{C}\frac{\chi(\varphi_1,\varphi_2)}{\psi(\varphi_1,\varphi_2)}d\varphi_1 d\varphi_2=+\infty\,.$$

Оценим величину $T-\tau$ для некоторого движения, начинающегося в точке $x(\varphi_1=0,\varphi_{2,0}=\tilde\varphi_{2,0})$, причём φ_1 изменяется от 0 до N (N — натуральное число).

Имеем: $$T-\tau(\varphi_{2,0})=\int_0^T(1-\chi(\varphi_1(t),\varphi_2(t))dt=$$

$$=\int_0^N(1-\chi(\varphi_1,\tilde\varphi_{2,0}+\alpha\varphi_1)\frac{d\varphi_1}{\psi(\varphi_1,\tilde\varphi_{2,0}+\alpha\varphi_1)}\le\frac{N}{m(\delta)},$$

где $m(\delta)>0$- минимум функции $\psi(\varphi_1,\varphi_2)$ на T^2\\$C$, причём, так как

$dt=\dfrac{d\varphi_1}{\psi(\varphi_1,\tilde\varphi_{2,0}+\alpha\varphi_1)}\ge\dfrac{d\varphi_1}{\max\psi}$, то T стремится к ∞ вместе с N.

Далее оценим в тех же пределах $\tau(\varphi_{2,0})$:

$$\tau(\varphi_{2,0})=\int_0^N\chi(\varphi_1,\tilde\varphi_{2,0}+\alpha\varphi_1)\frac{d\varphi_1}{\psi(\varphi_1,\tilde\varphi_{2,0}+\alpha\varphi_1)}=\sum_{k=0}^{N-1}g(\tilde\varphi_{2,0}+k\alpha)\,.$$

Задаём сколь угодно малое число $\sigma > 0$. Так как $\int\limits_{-\beta}^{\beta} g(\varphi_{2,0})d\varphi_{2,0}$ расходится при любом $\beta > 0$, то можно выбрать такое положительное $0 < \delta_1 < \delta\sqrt{1+\alpha^2}$, что

$$\int\limits_{-\delta\sqrt{1+\alpha^2}}^{-\delta_1} g(\varphi_{2,0})d\varphi_{2,0} + \int\limits_{\delta_1}^{\delta\sqrt{1+\alpha^2}_1} g(\varphi_{2,0})d\varphi_{2,0} > \frac{1-\sigma}{\sigma m(\delta)} + 1.$$

Обозначим через $g^*(\varphi_{2,0})$ функцию, равную $g(\varphi_{2,0})$ вне интервалов $(n-\delta_1, n+\delta_1)$ $(n \in Z)$ и равную нулю на этих интервалах. Очевидно $g^*(\varphi_{2,0})$ есть ограниченная периодическая с периодом 1 функция, интегрируемая по Риману. В силу леммы для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N_0 такое, что для $N > N_0$ имеем:

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g^*(\tilde{\varphi}_{2,0} + k\alpha) - \int\limits_0^1 g^*(\tilde{\varphi}_{2,0})d\tilde{\varphi}_{2,0} \right| < \varepsilon.$$

–

Отсюда для $\tau(\tilde{\varphi}_{2,0})$ получаем оценку:

$$\tau(\tilde{\varphi}_{2,0}) = \sum_{k=0}^{N-1} g(\tilde{\varphi}_{2,0} + k\alpha) \geq \sum_{k=0}^{N-1} g^*(\tilde{\varphi}_{2,0} + k\alpha) >$$

$$> N\left(\int\limits_0^1 g^*(\tilde{\varphi}_{2,0})d\tilde{\varphi}_{2,0} - \varepsilon \right) > \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \frac{N}{m(\delta)}.$$

Сопоставляя с оценкой для T-$\tau(\tilde{\varphi}_{2,0})$, находим: $\dfrac{T-\tau(\tilde{\varphi}_{2,0})}{\tau(\tilde{\varphi}_{2,0})} < \dfrac{\sigma}{1-\sigma}$ или

$\dfrac{\tau(\tilde{\varphi}_{2,0})}{T} > 1-\sigma$.

Переходя к пределу при $T \to +\infty$, получаем: $\mathrm{P}^+(F(t,x) \in C) \geq 1-\sigma$, в силу произвольности числа $\sigma > 0$, $\mathrm{P}^+(F(t,x) \in C) = 1$. Аналогично показывается, что $\mathrm{P}^-(F(t,x) \in C) = 1$. Таким образом, для рассматриваемой системы минимальный центр притяжения состоит из одной точки O.

Задача. Найти центр Хильми для потока, определяемого уравнениями
$\dot{\varphi}_1 = \psi(\varphi_1,\varphi_2)\cdot\psi(\varphi_1 - 1/2, \varphi_2 - 1/2)$, $\dot{\varphi}_2 = \alpha\cdot\psi(\varphi_1,\varphi_2)\cdot\psi(\varphi_1 - 1/2, \varphi_2 - 1/2)$,
где $\psi(\varphi_1,\varphi_2)$ удовлетворяет условиям примера.

§ 3. Рекуррентные и почти периодические движения

6.3.1. Минимальные множества и рекуррентные движения

Пусть динамическая система $F(t,x)$ определена в пространстве M.

Определение 1. Множество $\Sigma \subset M$ называется ***минимальным***, если оно непустое, замкнутое, инвариантное и не имеет истинного подмножества, обладающего этими тремя свойствами.

Точка покоя и траектория периодического движения представляют простейшие примеры минимальных множеств. Более сложный пример дают движения на поверхности тора (пример 1 п.6.1.3), из которых каждое всюду плотно на ней. Здесь минимальным множеством является всё пространство. Наоборот, в примере 2, п.6.1.3, где на поверхности тора существует точка покоя, вся поверхность тора уже не образует минимального множества, таковым является точка покоя. Все эти минимальные множества бикомпактны.

Траектория одного прямолинейного и равномерного движения в евклидовом пространстве даёт пример минимального множества, не являющегося бикомпактным.

Значение минимальных множеств заключается в том, что весьма широкий класс динамических систем обладает минимальными множествами, причём наибольший интерес представляют бикомпактные минимальные множества.

Утверждение 1. Всякое инвариантное замкнутое бикомпактное множество F содержит некоторое минимальное множество.

Упорядочивая цепь инвариантных множеств по включению, по лемме Цорна находим минимальный элемент (п.0.1.1).

Следствие 1. Если пространство движений M бикомпактно, то оно содержит минимальное множество.

Следствие 2. Если движение $F(t,x)$ положительно устойчиво по Лагранжу, то множество Ω_x его ω- предельных точек содержит минимальное множество. Это следует из бикомпактности множества Ω_x.

Из определения минимального множества непосредственно следует его характеристическое свойство: если Σ есть минимальное множество и $x \in \Sigma$ - любая его точка, то $\overline{F(t,x)} = \Sigma$, т.е. всякая траектория, заключённая в инвариантном множестве Σ, всюду плотна в Σ, и обратно.

В самом деле, если выполнено свойство плотности всюду, то всякое непустое замкнутое инвариантное подмножество множества Σ, содержа точку x, содержит в силу инвариантности $F(t,x)$; далее, в силу замкнутости, содержит

$\overline{F(t,x)}$, т.е. совпадает с Σ, которое, таким образом, является минимальным. Если же это свойство не выполнено, т.е. существует $x_0 \in \Sigma$ такая, что $\overline{F(t,x_0)}$ составляет истинную часть множества Σ, то, очевидно, Σ не есть минимальное множество.

Определение 2. Движение $F(t,x)$ называется ***рекуррентным***, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $T(\varepsilon) > 0$ такое, что любая дуга траектории этого движения временной длины $T(\varepsilon)$ аппроксимирует всю траекторию с точностью до $\varepsilon > 0$. Это можно записать так: для заданного $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом t_0 имеем: $F(I,x) \subset B(F(t_0,t_0+T(\varepsilon),x),\varepsilon)$.

Легко показать, что всякое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону. В самом деле, каково бы ни было малое число $\varepsilon > 0$ и большое число $t_0 > 0$, в силу рекуррентности движения $F(t,x)$ для точки x найдутся такие значения t_1 и t_2, $t_0 \le t_1 \le t_0 + T$, $-t_0 - T \le t_2 \le -t_0$, что $d(x,F(t_i,x)) < \varepsilon$ (i=1,2), что и доказывает устойчивость как P_+, так и P_-.

Связь между рекуррентными движениями и минимальными множествами устанавливается следующими двумя теоремами Биркгофа.

Теорема 1 (Биркгоф). Всякая траектория минимального бикомпактного множества рекуррентна.

Доказательство. Пусть Σ - минимальное бикомпактное множество, $x \in \Sigma$, и допустим, что движение $F(t,x)$ не рекуррентно.

Тогда найдутся число $\alpha > 0$ и последовательность неограниченно возрастающих интервалов времени $(t_\nu - T_\nu, t_\nu + T_\nu)$, $T_\nu \to +\infty$ таких, что каждая из соответствующих дуг: $F(t_\nu - T_\nu, t_\nu + T_\nu; x)$ находится на расстоянии $\ge \alpha$ от некоторой точки $y_\nu = F(\tau_\nu, x)$ на траектории $F(t,x)$. Выберем из последовательностей $\{y_\nu\}$ и $\{F(t_\nu,x) = x_\nu\}$ сходящиеся, чтобы не осложнять обозначений, считаем, что $\{y_\nu\}$ и $\{x_\nu\}$ суть выбранные сходящиеся подпоследовательности, так что $\lim\limits_{\nu\to\infty} y_\nu = y \in \Sigma$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = x^*$.

Рассмотрим движение $F(t,x^*)$.

Возьмём любую дугу $F(-T,T;x^*)$ его траектории, где T - сколь угодно большое фиксированное число. В силу свойства непрерывности потока можно выбрать $\delta(\alpha/3,T) > 0$ таким образом, чтобы из неравенства $d(x^*,z) < \delta$ следовало: $d(F(t,x^*),F(t,z)) < \varepsilon/3$ для $|t| \le T$.

Далее можно найти такое ν, чтобы одновременно были выполнены неравенства: $T_\nu > T$, $d(x_\nu, x^*) < \delta$ и $d(y_\nu, y) < \alpha/3$. Мы получаем для любого фиксированного $t \in (-T, T)$: $d(F(t, x^*), F(t, x_\nu)) < \alpha/3$.

Но по выбору точки y_ν принимая во внимание, что $|t| < T < T_\nu$ мы имеем: $d(y_\nu, F(t, x_\nu)) = d(y_\nu, F(t + t_\nu, x)) \geq \alpha$. Сопоставляя эти неравенства с неравенством $d(y_\nu, y) < \alpha/3$, получаем $d(F(t, x^*), y) > \alpha/3$ для $|t| < T$.

В силу произвольности выбора числа T это неравенство имеет место для всякого $t(-\infty < t < +\infty)$, т.е. $d(F(I; x^*), y) \geq \alpha/3$. В силу замкнутости множества Σ, мы имеем $x^* \in \Sigma$, $y \in \Sigma$ откуда, в силу инвариантности множества Σ, выводим $F(I; x^*) \subset \Sigma$. В таком случае инвариантное замкнутое множество $\overline{F(I; x^*)} \subset \Sigma$ является истинной частью Σ, так как оно не содержит точки y. Получили противоречие с предположением, что Σ минимальное множество. Теорема доказана.

Теорема 2 (Биркгоф). Если рекуррентное движение $F(t,x)$ расположено в полном пространстве, то замыкание $\overline{F(t, x)}$ его траектории есть бикомпактное минимальное множество.

Доказательство. Сначала докажем, что $\overline{F(t, x)}$ бикомпактно. Задаём произвольно число $\varepsilon > 0$. В силу рекуррентности траектории $F(t,x)$ можно найти такое $T > 0$, что дуга траектории $F(0, T; x)$ аппроксимирует $F(I; x)$ с точностью до $\varepsilon/2$, т.е. для любой точки $F(t,x)$ имеем $d(F(t, x), F(0, T; x) < \varepsilon/2$.

В силу бикомпактности дуги $F(0, T; x)$ на ней существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ - сеть, т.е. такое конечное множество точек $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$, что для любой точки $y \in F(0, T; x)$ найдётся $x^{(\nu)}$ с $d(x^{(\nu)}, y) < \varepsilon/2$. Очевидно, что множество $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$, является ε- сетью для $\overline{F(I; x)}$.

Отсюда следует бикомпактность множества $\overline{F(I; x)}$.

Докажем, что множество $\overline{F(I; x)} = \Sigma$ минимальное. Допустим противное; тогда найдётся замкнутое инвариантное множество A, составляющее истинную часть множества Σ. Очевидно, точка x не входит в A, так как иначе мы имели бы в силу инвариантности множества A: $F(I; x) \subset A$, и в силу замкнутости: $\overline{F(I; x)} = \Sigma = A$. Следовательно, $d(x, A) = \alpha > 0$. Выбираем $0 < \varepsilon < \alpha/2$ и определяем число $T(\varepsilon) > 0$, входящее в определение рекуррентности траектории $F(t,x)$. Пусть $y \in A$. Для чисел ε и T и точки y существует, в силу непрерывности потока, такое $\delta > 0$, что из неравенства $d(y,z) < \delta$ следует:

$$d(F(t,y),F(t,z)) < \delta \text{ для } |t| \le T .$$

Так как $y \in \overline{F(I;x)}$, то найдётся точка этой траектории внутри $B(y,\delta)$; пусть она соответствует значению времени t_1:

$$d(y,F(t_1,x)) < \delta .$$

Тогда $d(F(t,y),F(t+t_1,x)) < \varepsilon$ для $|t| \le T$, или, так как $F(y,t) \subset A$, то $d(F(t+t_1,x),A) < \varepsilon$ при $|t| \le T$. Отсюда $d(x,F(t+t_1,x) > \alpha - \varepsilon > \varepsilon$.

Следовательно, точка x не лежит в ε- окрестности дуги временной длины $2T$ с серединой в точке $F(t_1, x)$, что противоречит предположению о рекуррентности движения $F(t,x)$. Теорема доказана.

Так как бикомпактное пространство полно, то имеет место

Следствие. Если рекуррентное движение $F(t,x)$, лежит в локально-бикомпактном пространстве и устойчиво по Лагранжу, то $F(I;x)$, есть минимальное множество.

Заметим, что как при устойчивости P, так, в частности, и при рекуррентности движения $F(t,x)$, при сколь угодно больших значениях t, точка возвращается в окрестность своего начального положения.

Однако множество тех значений, при которых это возвращение имеет место, обладает в случае рекуррентного движения одним характеристическим свойством.

Определение. Множество чисел называется *относительно плотным*, если существует такое $L > 0$, что любой интервал $(\alpha, \alpha + L)$ длины L содержит хотя бы один элемент этого множества.

Задача. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы движение, устойчивое по Лагранжу, было рекуррентным, состоит в том, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ множество значений t, для которых $d(x,F(t,x)) < \varepsilon$, было относительно плотным.

6.3.2. Почти периодические движения

Пусть дана динамическая система $F(t,x)$ в полном метрическом пространстве M. Введём следующее

Определение. Движение $F(t,x)$ называется ***почти периодическим***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $L(\varepsilon)$, определяющее относительно плотное множество чисел $\{\tau_n\}$ (смещений), которые обладают следующим свойством: $d(F(t,x), F(t+\tau_n, x)) < \varepsilon$ для $-\infty < t < +\infty$.

Периодические движения являются частным случаем почти периодических; в самом деле, если движение допускает период *T*, то его кратные nT $(n \in Z)$ образуют относительно плотное множество, причём $d(F(t,x), F(t+nT, x)) = 0$.

Почти периодические движения, в свою очередь, являются частным случаем рекуррентных движений.

Утверждение 1. Всякое почти периодическое движение рекуррентно.

Доказательство. Если обозначить $y = F(t,x)$, где t - произвольное фиксированное, то, взяв в почти периодическом движении $F(t,x)$ число $T(\varepsilon) = L(\varepsilon)$ и смещение τ, соответствующее ε и лежащее в интервале $(\alpha - t, \alpha - t + T)$, мы получим, в силу определения почти периодичности: $d(F(t,x), F(t+\tau, x)) < \varepsilon$, или, обозначая $t + \tau = t_0$, $d(F(t,x), F(t_0, x)) < \varepsilon$, где $\alpha < t_0 < \alpha + T$, т.е. условие рекуррентности. Утверждение доказано.

Обратное утверждение не верно: рекуррентное движение может не быть почти периодическим.

Если почти периодическое движение расположено в полном пространстве, то замыкание его траектории $\overline{F(t,x)}$ бикомпактно и образует минимальное множество (в силу теоремы 2 п.6.3.1).

Свойство почти периодичности движений тесно связано с устойчивостью по Ляпунову.

Устойчивость по Ляпунову для абстрактных динамических систем определим следующим образом.

Определение. Точка $x \in M$ или движение $F(t,x)$ ***положительно устойчиво по Ляпунову*** (или отрицательно устойчиво, или двусторонне устойчиво) ***по отношению к множеству*** $U \in M$, если каждому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такое $\delta > 0$, что для каждой точки $y \in U$, удовлетворяющей условию $d(x,y) < \delta$, неравенство $d(F(t,x), F(t,y)) < \varepsilon$ выполняется для всех положительных (или всех отрицательных, или всех действительных) значений *t.*

Утверждение 2. Если все точки бикомпактного множества $A \subset U$ положительно (или отрицательно, или двусторонне) устойчивы по Ляпунову относительно *U*, то имеет место равномерная устойчивость по Ляпунову.

Последнее, как обычно, означает, что для $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только $x \in A$, $y \in U$, $d(x, y) < \delta$, мы имеем: $d(F(t, x), F(t, y)) < \varepsilon$ для $t>0$ (или $t < 0$, или $-\infty < t < +\infty$).

Доказательство. По условию устойчивости по Ляпунову для данного $\varepsilon > 0$ каждой точке $x \in A$ соответствует такое $\delta(x, \varepsilon) > 0$, что из $y \in U$, $d(x, y) < \delta(x)$ следует: $d(F(t, x), F(t, y)) < \varepsilon / 2$ для $t>0$. Выбирая из открытого покрытия множества A конечное и соответственно минимальное $\delta_{\min} > 0$, получаем доказательство утверждения.

Следующее утверждение устанавливает устойчивость по Ляпунову почти периодических движений.

Утверждение 3. Почти периодическое движение $F(t,x)$ в полном пространстве M двусторонне устойчиво по Ляпунову относительно множества точек своей траектории $\overline{F(I;\, x)}$, и притом равномерно для всех точек траекторий.

Доказательство. Пусть $F(t,x)$ - почти периодическое движение, $\varepsilon > 0$ - произвольное число. В силу почти периодичности, существует такое $L > 0$, что всякий интервал длины L содержит $\varepsilon / 3$- смещение.

В бикомпактном множестве $\overline{F(I;\, x)}$ (см. теорему 2 п.6.3.1.) непрерывная зависимость от начальных условий осуществляется равномерно, поэтому найдётся такое $\delta > 0$, что для любых точек y и $z \in \overline{F(I;\, x)}$ из $d(y, z) < \delta$ и из условия $d(y, z) < \varepsilon / 3$ будет следовать: $d(F(t, y), F(t, z)) < \varepsilon / 3$ для $0 \le t < L$. Покажем, что если $d(F(t_1, x), F(t_2, x)) < \delta$, то $d(F(t_1 + t, x), F(t_2 + t, x)) < \varepsilon$ для $-\infty < t < +\infty$. Берём любое фиксированное t и находим смещение $\tau = \tau(\varepsilon / 3)$, удовлетворяющее неравенству: $-t \le \tau < -t + L$, т.е. $0 \le \tau + t < L$.

По свойству $\varepsilon / 3$ - смещения имеем:

$$d(F(t_1 + t, x), F(t_1 + t + \tau, x)) < \varepsilon / 3,$$

$$d(F(t_2 + t, x), F(t_2 + t + \tau, x)) < \varepsilon / 3,$$

и, в силу выбора $\delta > 0$, так как $0 \le \tau + t < L$, имеем:

$$d(F(t_1 + t + \tau, x), F(t_2 + t + \tau, x)) < \varepsilon / 3.$$

Из трёх неравенств получаем для любого t

$$d(F(t_1 + t, x), F(t_2 + t, x)) < \varepsilon .$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 (Бохнер). Если $F(t,x)$ - почти периодическое движение в полном пространстве, то из любой последовательности движений $\{F(t_n + t, x)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{F(t_{n_k}+t,\ x)\}$, которая для $-\infty<t<+\infty$ равномерно сходится к некоторому движению $F(t,y)$, это последнее почти периодично с той же самой функцией $L(\varepsilon)$, как $F(t,x)$, но с неравенством $-\le\varepsilon$.

Доказательство. В силу теоремы 2 п.6.3.1 множество $\overline{F(I;\ x)}=\Sigma$ бикомпактно, так как $F(t,x)$, в силу утверждения 1 настоящего пункта, рекуррентно. Таким образом, из последовательности точек $\{F(t_n\ ,\ x)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{F(t_{n_k}+t,\ x)\}$, где $\lim\limits_{k\to\infty}F(t_{n_k},x)=y\in\Sigma$. Для простоты будем обозначать соответствующую подпоследовательность через $\{t_n\}$, так что $x_n=F(t_n,x)\to y$ при $n\to\infty$.

Для любого $\varepsilon>0$ определяем $\delta>0$ из двусторонней устойчивости по Ляпунову относительно $\overline{F(I;\ x)}=\Sigma$, т.е. так, чтобы из $d(F(t',x),F(t'',x))<\delta$ следовало: $d(F(t'+t,x),F(t''+t,x))<\varepsilon\ \ (-\infty<t<+\infty)$.

Выбирая n_0 настолько большим, что $d(F(t_n,x),F(t_{n+m},x))<\delta$ при $n>n_0$, $m>1$, и полагая $t'=t_n$, $t''=t_{n+m}$ находим:

$$d(F(t_n+t,x),F(t_{n+m}+t,x))=d(F(t_n,x),F(t_{n+m},x))<\varepsilon\ \ \text{для}\ -\infty<t<+\infty.$$

А это есть критерий равномерной сходимости.

Остаётся доказать, что $F(t,y)$ почти периодично. Пусть для заданного $\varepsilon>0$ смещение функции $F(t,x)$ равно τ, так что для $x_n=F(t_n\ ,\ x)$ имеем: $d(F(\tau+t,x_n),F(t,x_n))<\varepsilon\ \ (-\infty<t<+\infty)$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ и фиксированном t, получаем: $d(F(\tau+t,y),F(t,y))\le\varepsilon$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если $F(t,x)$ почти периодично, отлично от покоя и периодического движения и расположено в полном пространстве, то каждое из несчетного количества движений, входящих в минимальное множество $\overline{F(I;\ x)}=\Sigma$, почти периодично.

Это следует из того, что для каждой точки $y\in\overline{F(I;\ x)}=\Sigma$ найдётся такая последовательность точек $x_n=F(t_n\ ,\ x)$, что $y=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Следствие 2. В полном пространстве все точки минимального множества Σ почти периодических движений равномерно устойчивы по Ляпунову относительно Σ.

Исследуем теперь вопрос, при каких условиях из устойчивости по Ляпунову следует почти периодичность. Одного условия устойчивости по Ляпунову явно недостаточно, так как движения, совершающиеся равномерно по параллельным прямым евклидовом пространстве, очевидно устойчивы по Ляпунову.

Теорема 2. Если движение $F(t,x)$ рекуррентно и устойчиво по Ляпунову по отношению к $\overline{F(t,x)}$, то $F(t,x)$ почти периодично.

Доказательство. В самом деле, из устойчивости по Ляпунову следует существование для данного $\varepsilon > 0$ такого $\delta > 0$, что если $y \in \overline{F(I;\, x)}$ и $d(x,y) < \delta$, то

$$d(F(t,x),F(t,y)) < \varepsilon \;\; (-\infty < t < +\infty).$$

Из рекуррентности движения следует существование $T(\varepsilon)$ такого, что любая дуга временной длины T аппроксимирует всю траекторию, в частности, точку x. Отсюда сразу следует, что множество значений τ, удовлетворяющих условию $d(x,F(\tau,x)) < \varepsilon$ относительно плотно, причём $L(\varepsilon) = T(\varepsilon)$.

Таким образом, выберем относительно плотное множество чисел $\{\tau\}$, для которых выполняется неравенство $d(x,F(\tau,x)) < \delta$ ($\delta > 0$ определено из условия устойчивости по Ляпунову), для каждого такого δ мы находим (если положить $y = F(\tau,x)$): $d(F(t,x),F(t+\tau,x)) < \varepsilon$ $(-\infty < t < +\infty)$, что и доказывает почти периодичность движения.

Структура минимального множества, состоящего из почти периодических движений, характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3. Для того, чтобы бикомпакт мог быть замыканием почти периодической траектории, необходимо, чтобы он был пространством компактной связной коммутативной группы.

Доказательство. Пусть движение $F(t,x)$ почти периодическое и $M = \overline{F(I;\, x)}$ есть замыкание его траектории. Определим в M коммутативную групповую операцию (мы будем записывать её аддитивно). Пусть сначала $y \cup z \subset F(I,x)$, именно $y = F(t_y,x)$, $z = F(t_z,x)$. Нулём группы будет точка x; определяем сумму $y + z = F(t_y + t_z, x)$ и обратный элемент $-y = F(-t_y,x)$; эти операции, очевидно, удовлетворяют аксиомам группы и условию непрерывности. Далее распространяем определённую таким образом операцию по непрерывности на все M. Предварительно докажем лемму.

Лемма. Пусть $F(t,x)$ - почти периодическое движение. Если последовательности $F(t'_n, x)$ и $F(t''_n, x)$ фундаментальные, то и последовательность $F(t'_n - t''_n, x)$ фундаментальна.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно задано; из равномерной устойчивости по Ляпунову движения $F(t,x)$ определяем $\delta = \delta(\varepsilon/2) > 0$; в силу условия леммы найдётся такое N, что при $n \geq N$, $m \geq N$ имеем:

$$d(F(t'_n, x), F(t'_m, x)) < \delta,\ d(F(t''_n, x), F(t''_m, x)) < \delta.$$

Из первого неравенства получаем: $d(F(t'_n - t''_n, x), F(t'_m - t''_n, x)) < \varepsilon/2$, а из второго сдвигом по времени на $t'_m - t''_m - t''_n : d(F(t'_m - t''_m, x), F(t'_m - t''_n, x)) < \varepsilon/2$, оба последних неравенства дают:

$$d(F(t'_m - t''_m, x), F(t'_n - t''_n, x)) < \varepsilon$$

при $n \geq N$, $m \geq N$, что и доказывает лемму.

Теперь мы можем определить групповые операции во всем M. Пусть $a \in M$, $a = \lim_{n\to\infty} F(t_n^a, x)$; $b \in M$, $b = \lim_{n\to\infty} F(t_n^b, x)$. Тогда по определению

$$a + b = \lim_{n\to\infty} F(t_n^a + t_n^b, x);\ \ -a = \lim_{n\to\infty} F(-t_n^a, x).$$

Эти пределы существуют, так как по лемме последовательности

$$F(-t_n^a, x) = F(0 - t_n^a, x),\ \ F(t_n^a + t_n^b, x) = F(t_n^a - (-t_n^b), x)$$

являются фундаментальными: они удовлетворяют аксиомам группы.

Покажем непрерывность этих операций.

Пусть $a = \lim_{n\to\infty} F(t_n^a, x)$ и $b = \lim_{n\to\infty} F(t_n^b, x)$ и пусть задано $\varepsilon > 0$.

Из устойчивости по Ляпунову определяем $\delta = \delta(\varepsilon/3) > 0$.

Пусть $d(a, a') < \delta$ и $a' = \lim_{n\to\infty} F(t_n^{a'}, x)$.

Найдётся такое $N > 0$, что при $n > N$ выполняются неравенства:

$$d(a, F(t_n^a, x)) < \delta/3, \quad d(a', F(t_n^{a'}, x)) < \delta/3. \qquad \text{(A)}$$

Чтобы доказать непрерывность обратного элемента, напомним, что $-a = \lim_{n\to\infty} F(-t_n^a, x)$, и подчиним N ещё условию, чтобы при $n > N$ выполнялись неравенства $d(-a, F(-t_n^a, x)) < \varepsilon/3$, $d(-a', F(-t_n^{a'}, x)) < \varepsilon/3$. (B)

Тогда мы получаем: $d(F(t_n^a, x), F(t_n^{a'}, x) < \delta$, (C)

откуда, сдвигая время на $-t_n^a - t_n^{a'}$, имеем $d(F(-t_n^a, x), F(-t_n^{a'}, x)) < \varepsilon/3$,

а это вместе с неравенствами (B) даёт: $d(-a, -a') < \varepsilon$, если $d(a, a') < \delta/3$.

Для доказательства непрерывности суммы подчиним *N*, кроме (A) ещё условиям: при $n \geq N$

$$d(a+b, F(t_n^a + t_n^b, x)) < \varepsilon/3,\ d(a'+b, F(t_n^{a'} + t_n^b, x)) < \varepsilon/3. \quad \text{(D)}$$

Из (C) сдвигом на t_n^b получаем: $d(F(t_n^a + t_n^b, x), F(t_n^{a'} + t_n^b, x)) < \varepsilon/3$ и, сопоставляя с неравенствами (D), $d(a+b, a'+b) < \varepsilon$, если $d(a, a') < \delta/3$.

Однозначность определённых нами операций следует из непрерывности.

Верно и обратное утверждение. Однако, для его доказательства необходимо доказать, что на любой бикомпактной коммутативной связной группе существует всюду плотная однопараметрическая подгруппа. Это доказывается при помощи, так называемой, группы характеров.

Возникает вопрос: всякая ли динамическая система, определённая на пространстве группы и имеющая это пространство минимальным множеством, состоит из почти периодических движений. На этот вопрос отрицательный ответ дан А. А. Марковым на основе исследования движения на торе, определяемого уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \psi(\varphi_1, \varphi_2),\ \dot{\varphi}_2 = \alpha\psi(\varphi_1, \varphi_2),$$

где $\psi(\varphi_1, \varphi_2)$ - функция на торе (периодическая по аргументам φ_1, φ_2 с периодом 1), всюду положительная, α иррациональное число.

В заключение сделаем такое замечание. Теоремы 1 и 2 (п.6.3.1) и теорема 3 (п.6.3.2.) показывают, что хотя свойство рекуррентности и почти периодичности не формулируются топологически инвариантным способом, однако замыкания рекуррентного и почти периодического движения имеют инвариантные характеристики. Эти инвариантные характеристики имеют одну существенную особенность. Характеристика рекуррентности - минимальность замыкания траектории - совершенно не зависит от характера изменения времени. Всякая динамическая система, имеющая те же траектории, что и траектории, составляющие минимальное множество, будет состоять из рекуррентных движений. Для случая замыкания почти периодического движения в бикомпакте мы получим пространство группы, однако мы не можем утверждать, что всякая динамическая система, которая имеет в полученном пространстве группы те же траектории, что и заданная, будет состоять из почти периодических движений.

§ 4. Расширения динамических систем и неавтономные дифференциальные уравнения

Неавтономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x)$$

нередко появляются в следующей ситуации. Имеется автономная система «треугольного» вида

$\dot{x} = g(x,y)$, $\dot{y} = h(y)$ (*)

Если $y(t)$ решение системы $\dot{y} = h(y)$, то $\dot{x} = g(x, y(t)) = f(t,x)$

Поток, описываемый системой (*), является расширением потока, описываемого уравнением $\dot{y} = h(y)$, а $\dot{x} = f(t,x)$ описывает поведение решений (*), лежащих над одной траекторией потока $\dot{y} = h(y)$.

Для уравнения в вариациях возникает аналогичная ситуация, но только фазовое пространство системы является не прямое произведение, как для системы (*), а касательное расслоение *TM*.

Наконец, бывает, что система (*) задана безотносительно к каким-либо расширениям, но с ней можно связать некоторое расширение так, что она будет описывать движения этого расширения над некоторой траекторией фактора. Простой пример - интерпретация периодической неавтономной системы, как динамической системы в цилиндре, т.е. в произведении $S^1 \times X$. Формально систему $\dot{x} = f(t,x)$ можно превратить в автономную систему

$$\dot{x} = f(y,x), \quad y \in R, \ \dot{y} = 1,$$

описывающую некоторое расширение над потоком $\dot{y} = 1$ на *R*. Но это не приводит ни к каким выгодам, ибо все траектории небикомпактны ($y(t) \to \infty$ при $t \to \infty$) и ведут себя, как семейство параллельных прямых; применение понятий и результатов теории динамических систем в данном случае бессодержательно. Иная картина возникает, если фазовое пространство («где движется *y*») бикомпактно, как в примере с периодической системой. Преимущества, связанные с бикомпактностью, могут перевесить неудобства, связанные с переходом от системы дифференциальных уравнений к топологическому потоку.

Чтобы не загромождать изложение, опишем основную идею этого приема на частном, но важном случае, когда система - линейная однородная:

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad (**)$$

где x принадлежит некоторому банаховому пространству X. Присоединим к (**) всевозможные системы вида

$$\dot{x} = \widetilde{A}(t)x, \qquad (***)$$

где операторы $\widetilde{A}$ суть всевозможные сдвиги оператора $A(t)$ по времени, т.е. функции вида $t \to A(t+s)$, и пределы этих сдвигов в компактно-открытой топологии.

Компактно - открытой топологией называется топология базой открытых множеств которой является семейство $\{\langle K, U \rangle\}$, где K – компактное множество на вещественной оси, U – открытое множество в соответствующей операторной топологии.

При ограничениях на семейство операторов $A(t)$ типа равномерной ограниченности и равномерной непрерывности совокупность всех $\widetilde{A}$ оказывается метрическим бикомпактом M, в котором действует поток сдвигов $F(t, \widetilde{A}(s)) = \widetilde{A}(t+s)$.

Системы же (***) можно рассматривать как определяющие поток $H : R \times (M \times X) \to M \times X$; если $x(t)$ - решение (***) с начальным значением $x(0)=x$, то $H(t, (\widetilde{A}, x)) = (F(t, \widetilde{A}), x(t))$. $H(t, (\widetilde{A}, x))$ является расширением динамической системы $F(t, \circ)$ при отображении $p(\widetilde{A}, x) \to \widetilde{A}$, x - компоненты движений изменяются со временем согласно исходной системе (**).

Описанный прием позволяет привлекать к исследованию систем (***), предельных в описанном смысле для (**), различные соображения теории динамических систем и многие факты теории неавтономных уравнений становятся легко объяснимы.

Определение. Динамическим *расширением* называется динамическая система $H : R \times \xi \to \xi$, действующая в пространстве $\xi = (E, p, M)$ с проекцией $p : E \to M$ и удовлетворяющая условию $p(H(t, x)) = H(t, p(x))$, где $x \in E$.

Чаще всего в качестве E выбирают пространство $E = M \times X$, где M компактное метрическое пространство, X некоторое банахово пространство.

Пусть $\xi = (E, p, M)$ n-мерное вещественное векторное расслоение с компактной базой M. Если динамическая система $H : R \times \xi \to \xi$ определяет динамическую систему $F(t, \circ) = pH(t, \circ)$ и линейные отображения $H_m^t \mid E_m : E_m \to E_{F(t,m)}$, то говорят о ***линейном расширении***.

Здесь $E_m = p^{-1}(m)$ - слой над $m \in M$.

Линейное расширение называется ***гиперболическим***, если
имеются такие векторные подрасслоения E^s, E^s и числа d>0, $\alpha > 0$, что $E = E^s \oplus E^u$ (сумма Уитни) и

$\left\| H_m^t \right\| \le d \exp(-\alpha t)$ на подпространствах $E_m^s \subset p^{-1}(m)$, $H_m^t : E_m^s \to E_{F(t,m)}^s$, t>0;

$\left\| H_m^{-t} \right\| \le d \exp(-\alpha t)$ на подпространствах $E_m^u \subset p^{-1}(m)$, $H_m^t : E_m^u \to E_{F(t,m)}^u$, t>0.

Здесь $E_m = p^{-1}(m) = E_m^s \oplus E_m^u$ - условие трансверсальности для линейных расширений.

В заключении уместно привести следующее определение и теорему.

Определение. Топологическое пространство Λ ***вполне регулярно***, если всякое его одноточечное подмножество замкнуто, и для любого замкнутого множества $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ и для любой точки $\lambda_0 \notin \Lambda_0$ найдется такая непрерывная на Λ функция $f(\lambda)$, что $0 \le f(\lambda) \le 1$ для всех $\lambda \in \Lambda$; $f(\lambda_0) = 1$ и $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \Lambda_0$

Теорема.(Стоуна — Чеха о бикомпактном расширении).

Всякое вполне регулярное топологическое пространство Λ гомеоморфно всюду плотному подмножеству M_Λ бикомпактного хаусдорфова пространства M такого, что любая комплексная ограниченная непрерывная функция, определенная на M_Λ**,** допускает единственное непрерывное продолжение на M **(**Пространство M называется чеховским (или максимальным) бикомпактным расширением пространства Λ).

Чтобы понять, насколько замечательна приведенная теорема, рассмотрим в качестве пространства Λ полуоткрытый интервал $0 < \lambda \le 1$ вещественной оси. Этот интервал является, очевидно, всюду плотным подмножеством компактного пространства - отрезка $0 \le \lambda \le 1$. Однако, непрерывная и ограниченная на Λ функция $\sin\dfrac{1}{\lambda}$, имеющая, согласно теореме, непрерывное продолжение на чеховское бикомпактное расширение интервала Λ, не имеет, разумеется, такого продолжения на отрезок $0 \le \lambda \le 1$, получающийся добавлением к Λ одной точки. В действительности редко удается эффективно построить чеховское расширение небикомпактного пространства.

§ 5. Теорема Пуанкаре – Бендиксона

Изучение систем дифференциальных уравнений на плоскости или на двумерной сфере существенно упрощает теорема Жордана.

Жорданова кривая J определяется как топологический образ окружности; другими словами, J есть y-множество точек вида $y = y(t)$, $a \le t \le b$, где $y(t)$ - непрерывное отображение, $y(a)=y(b)$ и $y(s) \ne y(t)$ для $a \le s < t < b$.

Теорема Жордана. Если J - плоская жорданова кривая, то ее дополнение в плоскости состоит из объединения двух непересекающихся связных открытых множеств E_1 и E_2, граница каждого из которых есть J, т.е. $\partial E_1 = \partial E_2 = J$.

Аналогичная теорема справедлива для двумерной сферы. Отметим, что топологический образ двумерной сферы, вообще говоря, может не разбивать трёхмерное пространство на две несвязные компоненты (сфера Александера).

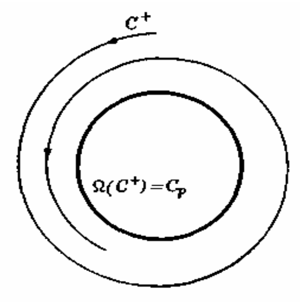
Отметим также, что любое непрерывное векторное поле на S^2 имеет особую точку, а поток на сфере хотя бы одну точку покоя.

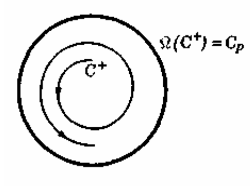
Теорема 1. (Пуанкаре-Бендиксона). Пусть поле $f(y) = (f^1(y^1, y^2), f^2(y^1, y^2))$ непрерывно в открытом плоском множестве E, и пусть C^+: $y = y_+(t)$ есть решение уравнения

$$\dot{y} = f(y) \qquad (*)$$

для $t \ge 0$, имеющее компактное замыкание в E. Предположим, кроме того, что $y_+(t_1) \ne y_+(t_2)$ для $0 \le t_1 < t_2 < \infty$, и что $\Omega(C^+)$ не содержит стационарных точек. Тогда $\Omega(C^+)$ состоит из точек y - периодического решения C_p: $y = y_p(t)$ *уравнения* (*). Далее, если $p > 0$ - наименьший период решения $y_p(t)$, то $y_p(t_1) \ne y_p(t_2)$ для $0 \le t_1 < t_2 < p$, т.е. кривая J: $y = y_p(t)$, $0 \le t \le p$, является жордановой.

Если задачи Коши для уравнения (*) имеют единственные решения, то либо $y_+(t_1) \ne y_+(t_2)$ для $0 \le t_1 < t_2 < \infty$, либо решение $y_+(t)$ является периодическим (т.е. $y_+(t + p) = y_+(t)$ при всех t для некоторого фиксированного положительного числа p). В последнем случае, исключенном в теореме 1, $\Omega(C^+)$ совпадает с множеством C^+.





Из доказательства теоремы 1 будет видно, что C^+ является спиралью, наворачивающейся на замкнутую кривую $\Omega(C^+): y = y_p(t)$ или извне, или изнутри.

Доказательство. Прямолинейный отрезок L в E называется ***трансверсалью*** для уравнения (*), если ни в одной точке $y \in L$ вектор $f(y) \neq 0$ и не параллелен отрезку L. Все пересечения L с решением $y = y(t)$ уравнения (*) происходят в одном и том же направлении при увеличивающемся t. Доказательство разобьем на четыре леммы.

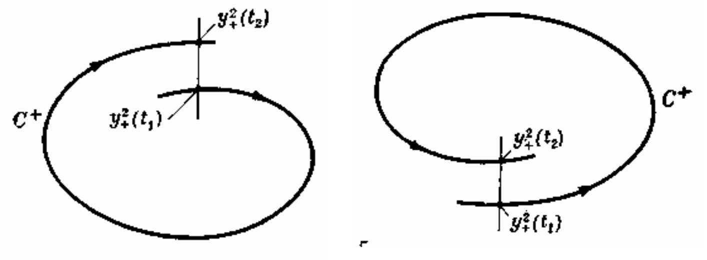
Лемма 1. Пусть $y_0 \in E$, $f(y_0) \neq 0$ и L - трансверсаль, проходящая через y_0. Тогда найдутся малая окрестность E_0 точки y_0 и число $\delta > 0$ такие, что каждое решение y=$y^0(t)$ задачи Коши $\dot{y} = f(y)$, $y(0) = y^0$ для $y^0 \in E_0$ существует в отрезке $|t| \leq \delta$ и пересекает L при этих значениях t точно один раз.

Доказательство. В самом деле, если взять произвольное $\varepsilon > 0$, то E_0 и $\delta > 0$ могут быть выбраны так, что $y^0(t)$ существует и отличается от $y^0 + t\,f(y_0)$ при $|t| \leq \delta$ не больше чем на $\varepsilon|t|$. Значит, если окрестность E_0 достаточно мала, то решение $y = y^0(t)$ пересекает L по крайней мере один раз, но в то же время оно при $|t| \leq \delta$ может пересечься с L не больше одного раза, так как пересечения его с L должны иметь одинаковые направления.

В частности, отсюда следует, что если $y = y^0(t)$ - решение уравнения (*) в некотором конечном отрезке, то $y = y^0(t)$ пересекается с L самое большее конечное число раз.

Лемма 2. Пусть L – трансверсаль к положительной полутраектории $y_+(t)$ в точке $y_+(t_0)$. Тогда $y_+(t)$ может пересекать L только по монотонной последовательности точек; иными словами, если y_i i-е пересечение $y_+(t)$ с L, то $y_i \in [y_{i-1}, y_{i-1}] \subset L$.

Доказательство. Без потери общности можно считать трансверсаль L отрезком оси y^2



Множество, состоящее из дуги $y = y_+(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ и прямолинейного отрезка $y_+^2(t_1) \le y^2 \le y_+^2(t_2)$ на y^2-оси, образует жорданову кривую J.

Дальнейшее очевидно из рисунков.

Следствие. Если L - трансверсаль, то $\Omega(C^+)$ содержит самое большее одну точку из L.

Действительно, если $y_0 \in L \cap \Omega(C^+)$, то из леммы 1 следует, что $y = y_+(t)$ пересекает L бесконечное число раз (а именно всякий раз, когда она проходит достаточно близко от точки y_0). С увеличением t точки пересечения $y = y_+(t)$ с L монотонно стремятся к y_0 вдоль L согласно лемме 2. Значит, множество $L \cap \Omega(C^+)$ не может содержать точки, отличной от y_0.

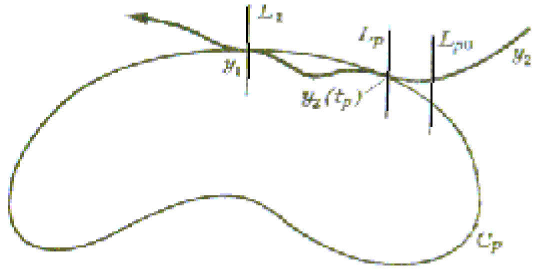
Лемма 3. Уравнение (*) имеет периодическое решение.

Доказательство. Так как C^+ ограничено, то $\Omega(C^+)$ не пусто. Пусть $y_0 \in \Omega(C^+)$ и $C_0 : y = y_0(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) решение задачи Коши $\dot{y} = f(y)$, $y(0) = y_0$, содержащееся в $\Omega(C^+)$; значит, $\Omega(C_0) \subset \Omega(C^+)$. Множество $\Omega(C_0)$ не пусто. Пусть $y^0 \in \Omega(C_0)$, так что точка y^0 не является точкой покоя, поскольку $\Omega(C^+)$ не содержит стационарных точек. Поэтому через точку y^0 проходит трансверсаль L^0, и $y = y_0(t)$ имеет вблизи y^0 бесконечное число пересечений с L^0; но y^0 и каждое пересечение $y_0(t)$ с L^0 принадлежит $\Omega(C^+)$. Согласно следствию, все эти точки должны совпадать. В частности, существуют $t_1 < t_2$, такие, что $y^0 = y_0(t_1) = y_0(t_2)$. Значит, уравнение (*) имеет периодическое решение $y = y_p(t)$ периода $p = t_2 - t_1$ такое, что $y_p(t) = y_0(t)$ для $t_1 \le t \le t_2$. Поскольку $y_0(t)$ ни на одном t-интервале не обращается в постоянную, можно считать, что $y_p(t^0) \ne y_p(t_0)$ для $0 \le t_0 < t^0 < p$.

Лемма 4. Множество $\Omega(C^+)$ совпадает со своим подмножеством $C_p : y = y_p(t)$($-\infty < t < +\infty$).

Доказательство. Если это не так, то множество $\Omega(C^+) \setminus C_p$ не пусто. Тогда C_p содержит точку y_1 являющуюся предельной точкой для $\Omega(C^+) \setminus C_p$, так как $\Omega(C^+)$ связно. Пусть L_1 - трансверсаль, проходящая через y_1. Любой малый шар с центром в y_1 содержит точки $y_2 \in \Omega(C^+) \setminus C_p$. Для любой такой точки y_2 уравнение (*) имеет решение $y = y_2(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) такое, что y_2 (0) = y_2 и $y_2(t) \in \Omega(C^+)$. Если точка y_2 достаточно близка к y_1, то y_2 (t) пересекает трансверсаль L_1. Согласно следствию из леммы 2, это пересечение должно быть обязательно в точке y_1.

Так как $y_2 \notin C_p$, то такое пересечение невозможно, если задача Коши для (*) имеют единственное решение. В общем случае этот факт можно доказать следующим образом. Пусть $y_2(t_p) \in C_p$, в то время как $y_2(t) \notin C_p$ для $0 < t < t_p$. Так как точка $y_2(t_p)$ не является точкой покоя, то найдется трансверсаль L_p, проходящая через $y_2(t_p)$.



Тогда малое смещение трансверсали L_p в подходящем направлении дает трансверсаль L_{p0}, которая пересекает C_p и $y = y_2(t)$ в двух различных точках.

Это противоречит следствию из леммы 2. Тем самым лемма 4 и теорема доказаны.

Доказанная теорема дает возможность описать структуру ω- предельных множеств траектории потока на сфере.

Следствие. Пусть $F(t,x)$ поток на двумерной сфере с конечным числом точек покоя. Пусть $\Omega(x)$ - ω- предельное множество точки $x \in S^2$. Тогда реализуется одна из следующих возможностей:

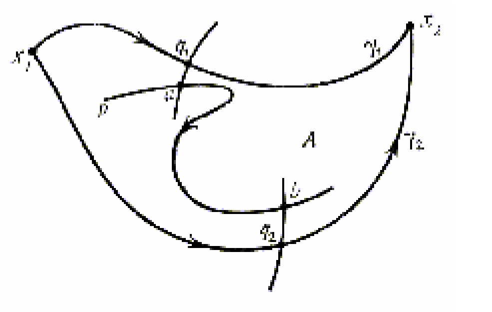
(1) $\Omega(x)$ - особая точка;

(2) $\Omega(x)$ - замкнутая траектория;

(3) $\Omega(x)$ состоит из особых точек $x_1,\dots,x_n$ и таких траекторий, которые не являются точками покоя и периодическими траекториями, что если $\gamma \subset \Omega(x)$, то $A(\gamma) = x_i$ и $\Omega(\gamma) = x_j$.

Доказательство. Если $\Omega(x)$ не содержит особых точек, то по теореме 1 $\Omega(x)$ является замкнутой траекторией. Если $\Omega(x)$ не содержит периодических траекторий, то $\Omega(x)$ сводится к одной точке, которая является точкой покоя, так как $F(t,x)$ имеет лишь конечное число особых точек, а $\Omega(x)$ связно.

Предположим, что $\Omega(x)$ содержит точки не лежащие на периодической траектории и точки покоя. Пусть γ непериодическая траектория, содержащаяся в $\Omega(x)$. Мы утверждаем, что $\Omega(\gamma)$ - особая точка. Если $\Omega(\gamma)$ содержит некоторую неособую точку *y*, возьмем трансверсаль *L* проходящую через *y*. Так как $\gamma \subset \Omega(x)$, то по теореме 1 γ пересекает *L* только в одной точке. Таким образом, γ - замкнутая траектория и $\Omega(x) = \gamma$. Но это приводит к противоречию, потому что $\Omega(x)$ содержит особые точки. Таким образом, $\Omega(\gamma)$ - особая точка. Аналогично, $A(\gamma)$ - особая точка.



Задача. Пусть x_1 и x_2 две различные точки покоя, лежащие в ω - предельном множестве точки $x \in S^2$. Тогда существует, самое большее, одна траектория $\gamma \in \omega(x)$, для которой $\alpha(\gamma) = x_1$, $\omega(\gamma) = x_2$.

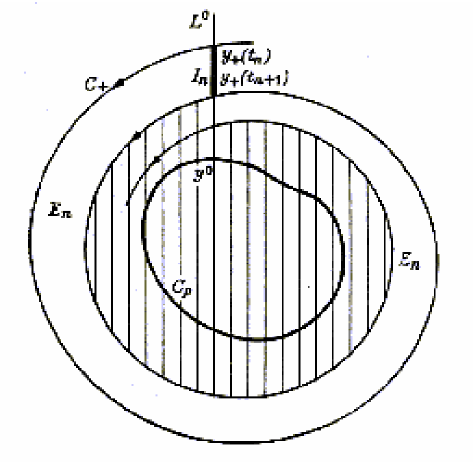
Пусть $C_p : y = y_p(t)$ есть периодическое решение уравнения (*) с периодом $p > 0$, так что кривая J: $y = y_p(t)$, $0 \le t \le p$, является жордановой.

Определение. Решение C_p называется ***орбитально устойчивым извне*** при $t \to +\infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если точка y_0 лежит во внешней области кривой *J* на расстоянии меньше $\delta(\varepsilon)$ от нее, то все решения C_+: $y = y_0(t)$ задачи Коши уравнения (*) существуют и остаются при $t \ge 0$ в ε - окрестности *J*.

Решение C_p называется ***асимптотически орбитально устойчивым извне*** при $t \to +\infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если точка y_0 лежит во внешней области кривой *J* на расстоянии $< \delta(\varepsilon)$ от нее, то все решения $C_0^+ : y = y_0(t)$ задачи Коши уравнения(*) существуют при $t \ge 0$ и $\Omega(C_0^+) = J$. Можно сформулировать аналогичные определения, заменив внешнюю область на внутреннюю или $t \to +\infty$ на $t \to -\infty$.

Теорема 2. Пусть функция $f(y)$ непрерывна в открытом плоском множестве *E*, и пусть решения уравнения $\dot{y} = f(y)$ определяются начальными условиями однозначно. Пусть C_p: $y = y_p(t)$ есть периодическое решение уравнения $\dot{y} = f(y)$ с наименьшим положительным периодом *p*.

Тогда:



(i) для того чтобы C_p было асимптотически орбитально устойчивым извне при $t \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы орбита C_p являлась $\Omega(C_0^+)$ - множеством для некоторого решения $C_0^+ : y = y_0(t)$, $t \geq 0$, расположенного во внешней области C_p;
ii) для того чтобы C_p было орбитально устойчивым извне при $t \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы <u>или</u> орбита C_p являлась $\Omega(C_0^+)$ - множеством для некоторого решения $C_0^+ : y = y_0(t)$, $t \geq 0$, расположенного во внешней области C_p, <u>или</u> чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало периодическое решение уравнения (*), расположенное во внешней части ε-окрестности C_p.

Доказательство моментально следует из приведенного рисунка и теоремы 1.

В заключение этого параграфа мы приведем некоторые сведения о поведении решения системы

$$\dot{y} = f(y), \qquad y(0)=y_0$$

в окрестности изолированной стационарной точки, т.е. $f(0)=0$ и $f(y) \neq 0$ при $0 < \|y\| < b$.

Заметим, что если задача Коши имеет единственное решение для всех y_0 и C_+: $y = y_0(t)$ есть решение задачи Коши с $0 < \|y_0\| < b$, определенное на максимальном интервале существования $[0, \varpi_+)$, то возможны лишь следующие случаи (взаимно не исключающие друг друга):

1) есть наименьшее t_0, $(0 < t_0 < \varpi_+)$ такое, что $\|y(t_0)\| = b$;
2) $\varpi_+ = +\infty$ и траектория C_0^+ представляет собой жорданову кривую, содержащую во внутренней области точку $y = 0$;
3) $\varpi_+ = +\infty$ и C_0^+ есть спираль, «наматывающаяся» на некоторую замкнутую орбиту;
4) $\varpi_+ = +\infty$ и $y_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$;
5) $\varpi_+ = +\infty$, C_0^+ есть спираль вокруг точки $y = 0$ и $\Omega(C_0^+)$ состоит из конечного или бесконечного числа орбит $y(t)$, $-\infty < t < +\infty$ таких, что $y(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

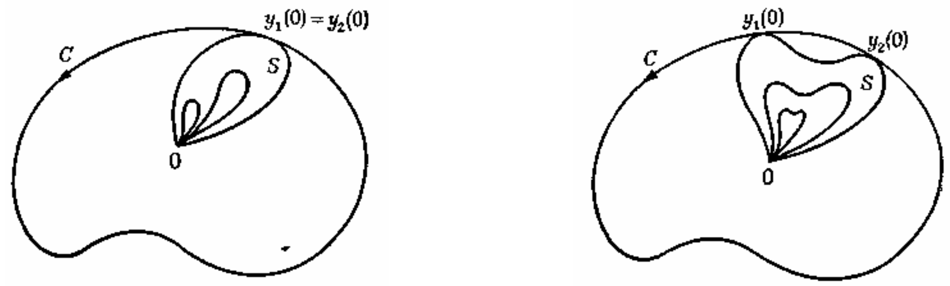
Под ***спиралью*** $y = y_0(t),\ 0 \le t < \varpi_+$, вокруг точки $y_0 = 0$ мы понимаем линию $y_0(t) \ne 0$ такую, что непрерывное продолжение угла $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y_0^2(t)}{y_0^1(t)}\right)$ стремится к $+\infty$ или $-\infty$ при $t \to \varpi_+$.

Если любая окрестность точки $y = 0$ содержит замкнутые орбиты, окружающие точку $y = 0$, то стационарная точка $y = 0$ называется ***точкой вращения.***

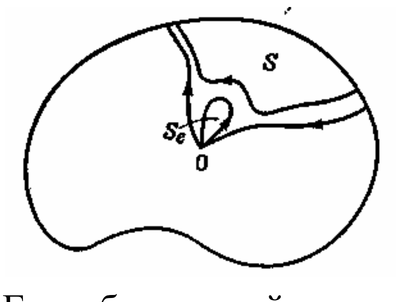
Пусть C - положительно ориентированная жорданова кривая, окружающая точку $y = 0$. Решение $y = y(t)$ уравнения $\dot{y} = f(y)$ называется положительным или отрицательным ***базисным решением*** для C, если $y(t)$ определено или для $t \ge 0$, или для $t \le 0$; $y(0) \in C$; $y(t)$ находится во внутренней области C при $t \ne 0$ и $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ или соответственно $t \to -\infty$.

Пусть $y = y_1(t),\ y_2(t)$ суть два базисных решения для C. Открытое подмножество S внутренней области кривой C, ограниченное точкой $y=0$, дугами $y_1(t)$, $y_2(t)$ и ориентированной замкнутой дугой C_{12}, идущей от $y_1(0)$ к $y_2(0)$, называется ***сектором*** кривой C (определенным упорядоченной парой $y = y_1(t), y_2(t)$) Не исключено, что $y_1(0) = y_2(0)$, так что дуга C_{12} кривой C может вырождаться в точку.

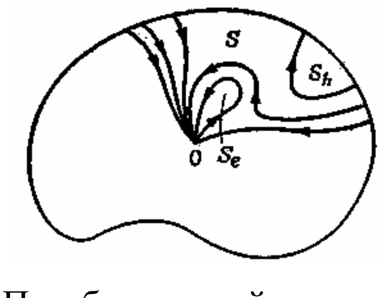
Сектора разделяют на типы эллиптические, гиперболические и параболические.



Эллиптические секторы



Гиперболический сектор



Параболический сектор

При исследовании особой точки важную роль играет понятие индекса векторного поля, относительно изолированной стационарной точки и является гомотопическим инвариантом. Индекс вычисляется по формуле

$$j_f(J) = \frac{1}{2\pi}\int_J \frac{f^1 df^2 - f^2 df^1}{(f^1)^2 + (f^2)^2}.$$

Индекс векторного поля относительно точки ноль определяется равенством

$$2j(0)=2+n_e-n_h,$$

n_e – число эллиптических, n_h –число гиперболических секторов; $j(0)=1$ для точек вращения.

§ 6. Уравнения второго порядка.

В этом параграфе мы укажем некоторые применения теоремы Пуанкаре - Бендиксона, которые связаны с уравнением второго порядка

$$\ddot{u} + h(u,\dot{u})\dot{u} + g(u) = 0$$

для вещественной функции u. Это уравнение эквивалентно следующей автономной системе первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -h(u,v)v - g(u). \qquad (*) \end{aligned}$$

Если произведение $ug(u) > 0$, то член $g(u)$ называется «упругой силой» (по аналогии с уравнением гармонического осциллятора $\ddot{u} + u = 0$). Если $h > 0$, то «сила сопротивления», член $h\dot{u}$, стремится уменьшить скорость $|\dot{u}|$. Следующую теорему можно интерпретировать так: если упругая сила и сила сопротивления не слишком малы, то решения уравнения ограничены.

Теорема. Пусть $g(u)$, $h(u, v)$ - вещественные непрерывные функции, определенные для всех u, v и обладающие следующими свойствами:

i) решения системы (*) однозначно определяются начальными условиями;

ii) существует число $a > 0$ такое что $ug(u)>a$ при $|u| \ge a$,

$$G(u) \equiv \int_0^u g(r)dr \to \infty \text{ при } |u| \to \infty;$$

iii) существует число $m > 0$ такое, что $h(u,v) \ge -m$ при $|u| \le a$, $-\infty < v < +\infty$;

iv) если $h_0(u) = \inf h(u, v)$ для $-\infty < v < +\infty$, то

$$h_0(u) > 0 \text{ при } |u| \ge a,$$

$$H(u) \equiv \int_0^u h_0(r)dr \to \infty \text{ при } |u| \to \infty .$$

Тогда существует жорданова кривая C, ограничивающая некоторую область E, содержащую начало координат такая, что на C нет точек выхода для области E, а если $u(t)$, $v(t)$ есть решение системы (*), начинающееся в момент $t = 0$, то $u(t)$, $v(t)$ существует при всех $t \geq 0$ и $(u(t),v(t)) \in E$ при больших t.

Определение. Точка y_0 называется ***точкой выхода*** для E по отношению к системе $\dot{y} = f(y)$, если для каждого решения $y(t)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $y(t) \in E$ при $t \in (-\varepsilon, 0)$ и $y(t) \in \overline{E}$ для $0 < t < \varepsilon$.

Достаточным условием выполнения свойства iv) является существование числа $M>0$ такого, что $h(u, v)>M>0$ для $-\infty < v < +\infty$, $|u| \geq a$.

Доказательство. Вдоль дуги решения $u(t)$, $v(t)$ системы (*) имеем

$$\frac{dv}{du} = -h(u,v) - \frac{g(u)}{v}$$

Пусть $|g(u)| \leq b$ для $|u| \leq a$. Тогда из (iii) мы получаем, что

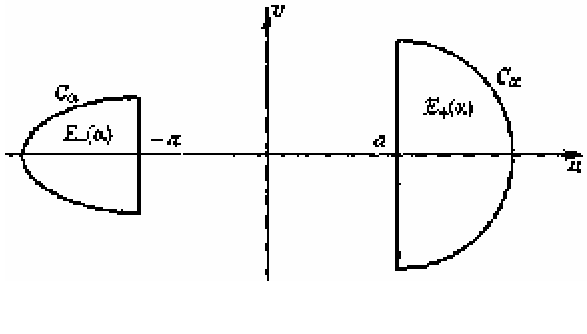
$$\frac{dv}{du} \leq m + \frac{b}{|v|} \leq 2m \; \frac{dv}{du} \leq m + \frac{b}{|v|} \leq 2m, \text{ если } |u| \leq a,\ |v| \geq \frac{b}{m}.$$

Пусть $\varphi(u)$ - положительная непрерывная возрастающая функция от $u>a$ такая, что $\varphi(u) > \dfrac{g(u)}{h_0(u)}$ и $\varphi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$.

Тогда из неравенств $v \leq -\varphi(u) < -\dfrac{g(u)}{h_0(u)}$ следует, что $v<0$,

$h(u,v) \geq h_0(u) > -\dfrac{g(u)}{v}$ и потому $\dfrac{dv}{du} < 0$, если $u \geq a$, $v \leq -\varphi(u)$.

Рассмотрим дуги $C_\alpha : \dfrac{v^2}{2} + G(u) = \alpha$ для $|u| \geq a$ при больших значениях $\alpha > 0$.



Эти дуги расположены симметрично относительно u-оси. Часть каждой такой дуги и отрезок линии $u=a$ (или $u=-a$) образуют жорданову кривую, ограничивающую некоторую область $E_+(a)$ (или $E_-(a)$).

Рис. 1

Вдоль решения u (t), v (t) системы (*) функция $\psi(t) = v^2/2 + G(u(t))$ имеет производную $\dot{\psi}(t) = v(-v(h(u,v) - g(u)) + g(u)u = -h(u,v)v^2 < 0$,
если $|u(t)| \geq a$, $v(t) \neq 0$. Значит функция $\psi(t)$ убывает, так что дуга
$u = u(t)$, $v = v(t)$ входит в $E_\pm$ (a) при увеличении t сразу же после пересечения с граничной кривой C_a области $E_\pm(a)$ и остается в $E_\pm(a)$ до тех пор, пока $|u(t)| \geq a$.

Для удобства перенесем построения, связанные с C, на рис. 2.

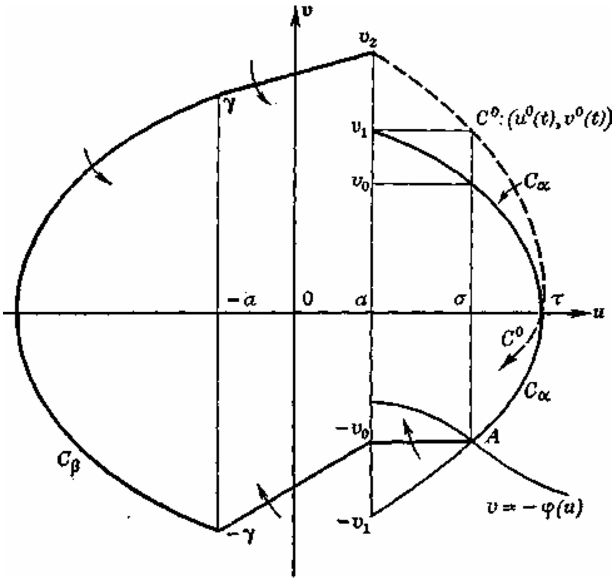


Рис. 2

Выберем $\sigma > a$ столь большим, чтобы

$$\varphi(\sigma) \geq \frac{b}{m} \quad \text{и} \quad \frac{H(a)}{4a} > 2m.$$

Выберем α так, чтобы дуга C_α проходила через точку $A = (\sigma, -\varphi(\sigma))$; например, $\alpha = \varphi^2(\sigma)/2 + G(\sigma)$. В частности, C_α проходит через точку $(u,v) = (\sigma, \varphi(\sigma))$. Пусть $\tau > 0$ обозначает точку, где C_α пересекается с u-осью.

Пусть $u^0(t)$, $v^0(t)$ есть решение системы (*), определенное начальными условиями $(u^0(0), v^0(0)) = (\tau, 0)$. Когда t убывает от нуля, $u^0(t)$ убывает, а $v^0(t)$ возрастает до тех пор, пока $u^0(t)$ не примет значения a в некоторой точке $t = t_2 < 0$. Это вытекает из соотношения $\dot{v} = -hv - g \leq -g < 0$, так как из него следует, что $\dot{u} = v > 0$, пока $u \geq a$. Обозначим через C^0 дугу $(u, v) = (u^0(t), v^0(t))$. В силу приведенных выше рассуждений часть дуги C^0 для $t_2 \leq t \leq 0$ имеет с C_a только одну общую точку τ. В частности, если $v^0(t) = v_1$ при $u^0(t) = \sigma$ и если $v_0 = \varphi(\sigma)$, то $v_1 > v_0$. Кроме того, на C^0 $dv/du \leq -h(u,v) \leq -h_0(u)$ при $a \leq u \leq \sigma$. Значит, если $v_2 = v^0(t_2)$, то

$$v_2 \geq v_1 + \int_a^\sigma h_0(r)dr = v_1 + H(\sigma) > v_0 + H(\sigma).$$

Положим $\gamma = v_0 + H(\sigma)/2 < v_2 - H(\sigma)/2$. Тогда тангенсы угла наклона прямолинейных отрезков, соединяющих γ с v_2 и γ с $-v_0$ равны, по меньшей мере, $\frac{H(\sigma)}{2a}$- и поэтому, в силу $\frac{H(a)}{4a} > 2m$, превосходят $2m$.

Определим число β равенством $\beta = \gamma^2/2 + G(a)$, так что дуги C_β будут проходить через точки $\pm\gamma$.

Пусть C обозначает жорданову кривую, состоящую из дуги C^0 от τ до v_2. прямолинейного отрезка от v_2 до γ, дуги C_β от γ до $-\gamma$, прямолинейного отрезка от $-\gamma$ до $-v_0$, горизонтального отрезка от $-v_0$ до A и дуги C_α от A до τ.

Пусть E - внутренняя область кривой C.

Убедимся сначала, что точки кривой C, за исключением точек на C^0, являются для E точками строго входа. Для этого достаточно проверить, что дуги решений системы (*), достигающие прямолинейных отрезков на C, пересекают C так, как указано на рис. 2. Это ясно для горизонтального отрезка, соединяющего $-v_0$ и A, так как там $\dot{u} = v < 0$ и $dv/du<0$, согласно неравенства $\frac{dv}{du} < 0$, если $u \ge a$, $v \le -\varphi(u)$, а $\varphi(u)$ монотонна (при $u \ge a$). Угловой коэффициент отрезка, соединяющего $-\gamma$ с $-v_0$ равен $H(\sigma)/4a > 2m$, в то время как вдоль этого отрезка $\dot{u} = v < 0$ и $dv/du<0$, поскольку $v_0 = \varphi(\sigma) \ge b/m$. Аналогично, угловой коэффициент отрезка, соединяющего γ с v_2 больше чем $2m$, и на нем $v \ge \gamma > v_0 \ge b/m$, так что $\dot{u} = v > 0$ и $dv/du \le 2m$.

Остается показать, что каждое решение $u(t)$, $v(t)$ системы (*), начинающееся с $t = 0$, существует для всех $t \ge 0$ и что $(u(t), v(t)) \in E$ для больших t. Для этого сначала обозначим σ через σ_0, а жорданову кривую C через $C(\sigma_0)$. Тогда для каждого $\sigma \ge \sigma_0$ описанное выше построение дает жорданову кривую $C(\sigma)$ и ее внутреннюю область $E(\sigma)$. Множества $E(\sigma)$ возрастают вместе с σ, а объединение $U = \bigcup\limits_{\sigma > \sigma_0} C(\sigma)$ находится во внешней области $E(\sigma_0)$. Пусть $u(t)$, $v(t)$ есть решение системы (*), начинающееся в некоторой точке из U при $t = 0$.

Пока $(u(t), v(t))$ остается в U, для каждого t существует единственная функция $\sigma = \sigma(t)$ такая, что $(u(t), v(t)) \in C(\sigma(t))$ и $\sigma(t)$ является невозрастающей функцией от t. Отсюда следует, что $(u(t), v(t))$ существует для всех $t \ge 0$.

Допустим, что $u(t),v(t)$ никогда не входит в $E(\sigma_0)$, так что $\sigma(t) \geq \sigma_0$ для всех $t \geq 0$. Пусть $\sigma_1 = \lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(t)$. Тогда $(u\ (t),v(t))$, когда t увеличивается, подходит как угодно близко к $C(\sigma_1)$. В этом случае, однако, ясно, что $(u\ (t),v(t)) \in E(\sigma_1)$ для произвольно больших t. Но тогда $\sigma(t) > \sigma_1$ при больших t, что противоречит монотонности $\sigma(t)$. Теорема доказана.

Следствие. Предположим, что выполнены условия теоремы и, кроме того, $g(u) \neq 0$ для $u \neq 0$ (так что $ug(u) > 0$ для $u \neq 0$ и начало координат есть единственная стационарная точка для системы (*), и допустим, что начало координат ни для какого решения системы (*) не является ω - предельной точкой. Тогда система (*) имеет периодическое решение $(u_0(t), v_0(t)) \neq 0$, асимптотически орбитально устойчивое извне при $t \to \infty$, а внутренняя область жордановой кривой $u = u_0\ (t)$, $v = v_0\ (t)$ содержит начало координат.

Доказательство. Если для какого-либо решения $(u(t),v(t))$ начало координат не является ω - предельной точкой, то из теоремы Пуанкаре - Бендиксона (теорема 1 п.6.5) следует, что множество его ω -предельных точек является периодическим решением $(u_0(t),v_0(t))$, поскольку $(u(t),v(t)) \in E$ при больших t. Жорданова кривая $u = u_0\ (t)$, $v = v_0\ (t)$ содержит внутри себя начало координат. Отсюда также следует, что если существуют два периодических решения, то одна из соответствующих жордановых кривых содержит в ее внутренней области другую. Так как все периодические орбиты содержатся в бикомпакте $E \cup C$, то существует единственное периодическое решение $(u_0(t),\ v_0(t))$ такое, что жорданова кривая C_0: $u = u_0\ (t)$, $v = v_0\ (t)$ содержит все периодические решения в своей внутренней области.

Периодическое решение $(u_0\ (t),v_0(t))$ асимптотически орбитально устойчиво извне при $t \to +\infty$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим решение $(u(t),v(t))$, выходящее при $t = 0$ из некоторой точки, принадлежащей внешней области кривой C_0. Поскольку начало координат не является для решения $(u(t),v(t))$ (по условию) ω - предельной точкой, множество его ω - предельных точек составляет периодическую орбиту), которая необходимо совпадает с C_0. Значит, наше утверждение следует из теоремы 2.(п.6.5.).

Задача. Доказать, что уравнение Ван дер Поля $\ddot{u} + \mu(u^2 - 1)\dot{u} + u = 0$, где $\mu > 0$ имеет ровно одно периодическое решение, и это решение орбитально устойчиво (извне и изнутри) при $t \to \infty$.

ГЛАВА 7

ЭЛЕМЕНТЫ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Определение. Основные свойства

Эргодическая теория изучает движения в пространствах с мерой. Поэтому вначале остановимся на понятии пространства с мерой. Мы будем считать заданным абстрактное пространство *M*, точки которого обозначаются буквами *x*, *y*, *z*. В дальнейшем это пространство будет служить фазовым пространством динамической системы.

Мы предполагаем, что выделена некоторая σ - алгебра $\wp$ подмножеств пространства *M*, на которой определена мера μ. Как правило, в дальнейшем предполагается, что мера μ является нормированной: $\mu(M) = 1$, и полной, т.е. все подмножества множеств меры нуль принадлежат $\wp$.

Иногда мы будем рассматривать пространства *M*, в которых мера μ бесконечна: $\mu(M)=\infty$, однако *M* можно представить в виде объединения счетного числа подмножеств конечной меры. Такие пространства называются пространствами с σ - конечной мерой.

Пространства с мерой обычно будут обозначаться $(M, \wp, \mu)$. Если на *M* выделена лишь σ - алгебра $\wp$, а мера μ, возможно, не задана, то $(M, \wp)$ называется измеримым пространством.

Приведем некоторые примеры пространств с мерой, встречающихся в эргодической теории.

Примеры пространств с мерой**.**

1. Пусть M n-мерный тор, $M = T^n = S^1 \times ... \times S^1$, на котором введены естественные циклические координаты $x^1,\dots, x^n$. В этих координатах $d\mu = dx^1...dx^n$.

2. M есть n-мерное компактное замкнутое ориентируемое многообразие класса C^∞. Дифференциал меры задается в виде $d\mu = p(x)dx^1...dx^n$, где $x_1,\dots, x_n$ - допустимая локальная система координат, $p(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Здесь снова $\wp$ - бэровская σ -алгебра, т.е. пополнение σ - алгебры бэровских множеств по мере μ.

Конкретизируя этот пример, допустим, что M - n-мерное компактное риманово многообразие класса C^{∞}. В допустимых локальных координатах метрика имеет вид $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$. Дифференциал меры μ_0, порожденной римановой метрикой, имеет вид $d\mu_0 = \mathrm{const}\sqrt{\det(\mathrm{g}_{ij})}dx^1...dx^n$. Часто рассматривают меры μ, для которых $d\mu = p(x)d\mu_0$, т.е. меры, заданные плотностью по мере μ_0.

Центральное понятие эргодической теории - понятие автоморфизма пространства с мерой.

Определение 1. ***Автоморфизмом*** пространства с мерой (M, $\wp$, μ) называется взаимнооднозначное отображение F пространства M на себя такое, что для всякого $A \in \wp$ множества $F(A)$, $F^{-1}(A)$ принадлежат $\wp$, и

$$\mu(A) = \mu(F(A)) = \mu(F^{-1}(A)) .$$

Мера μ называется ***инвариантной мерой*** автоморфизма F.

Пример 1. M есть n-мерный тор $M = T^n$ с нормированной мерой Лебега μ, и преобразование F в циклических координатах $x^1,\dots, x^n$ задается формулой

$$F(x^1,...,x^n) = (x^1 + \alpha_1(\mathrm{mod}\ \ 1),...,x^n + \alpha_n(\mathrm{mod}\ \ 1)) ,$$

где $\alpha_1,...,\alpha_n$ - действительные числа. Ясно, что F - автоморфизм (т.е. мера μ инвариантна). Этот автоморфизм называется ***сдвигом на торе***. В случае $n = 1$ (т.е. $M = S^1$) автоморфизм F называется ***поворотом окружности***.

Пример 2. M - n-мерное компактное замкнутое ориентируемое многообразие класса C^{∞}, F - диффеоморфизм класса C^{∞}. Если ($x^1,\dots, x^n$) - допустимые координаты в окрестности точки $x_0 \in M$, (y_1, ..., y_n) - допустимые координаты в окрестности точки $y_0 = F(x_0)$, то F локально задается C^{∞}- функциями $y^k=f^k(x^1,\dots, x^n)$, $k = 1, \dots, n$.

Если дифференциал меры $d\mu$, задается плотностью $p > 0$, то условие инвариантности меры μ имеет вид:

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)|_{x=x_0} = \frac{p(y_0)}{p(x_0)}, \quad i, j=1,\dots,n.$$

Определение 2. ***Эндоморфизмом*** пространства с мерой (M, $\wp$, μ) называется однозначное (но не обязательно взаимно однозначное) отображение F пространства M на себя такое, что для всякого $A \in \wp$ множества $F^{-1}(A)$ принадлежат $\wp$, и $\mu(A) = \mu(F^{-1}(A))$, где $F^{-1}(A)$ – полный прообраз множества A.

Пример. Пусть M – есть S^1 с мерой Лебега. Отождествим M с полуинтервалом $0 \le x < 1$, и преобразование F зададим формулой $F(x)=2x(\mathrm{mod}\ 1)$. При таком F каждый отрезок $\Delta \subset S^1$, длины меньше ½, переходит в отрезок удвоенной длины, и для каждого отрезка $\Delta' \subset S^1$ существуют два отрезка половинной длины, которые под действием F переходят в $\Delta' \subset S^1$. Отсюда вытекает, что мера Лебега инвариантна относительно F.

Определение 3. Пусть $F(t,x)$ - однопараметрическая группа автоморфизмов пространства с мерой $(M, \wp, \mu)$, $t \in R$, т.е. $F(t+s, x)=F(t, F(s,x))$ для любых $t, s \in R$ и $x \in M$. Тогда $F(t,x)$ называется ***потоком***, если для любой измеримой функции $f(x)$ на M функция $f(F(t,x))$ измерима на прямом произведении $R \times M$.

Условие измеримости, фигурирующее в этом определении, можно сформулировать также в следующей (эквивалентной) форме: отображение $F : R \times M \to M$ измеримо. В главе 6 требовали более жесткое условие - непрерывность потока.

Определение 4. Пусть $F(t,x)$ - однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов пространства с мерой $(M, \wp, \mu)$, $t \in R_+$, т.е. $F(t+s, x)=F(t, F(s,x))$ для любых $t, s \in R_+$ и $x \in M$. Тогда $F(t,x)$ называется ***полупотоком***, если для любой измеримой функции $f(x)$ на M функция $f(F(t,x))$ измерима на прямом произведении $R_+ \times M$.

В определениях 1 - 4 введены четыре основных объекта, изучаемых в эргодической теории: автоморфизм, эндоморфизм, поток и полупоток на пространстве с мерой. Далее, термином «динамическая система» называется любой из этих объектов. Само пространство с мерой называется ***фазовым пространством*** динамической системы.

В эргодической теории под «непрерывным потоком» часто понимают следующее чуть более общее, чем введенное выше, понятие потока. Два автоморфизма F_1 и F_2, действующие на пространстве $(M, \wp, \mu)$, называют совпадающими (mod 0), если найдется такое множество $M' \in \wp$, что $\mu(M') = 1$ и $F_1(x) = F_2(x)$ для всех $x \in M'$.

Определение 5. Поток автоморфизмов $F(t,x)$, $t \in R$, пространства с мерой

$(M, \wp, \mu)$, называется ***непрерывным потоком***, если для любых $t_1, t_2 \in R$ автоморфизмы $F(t_1+t_2,x)$ и $F(t_1,F(t_2,x))$ совпадают (mod 0).

Пример. M - n - мерное компактное замкнутое ориентируемое многообразие класса C^∞, X - векторное поле класса C^∞ ($X = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$), которое в локальных координатах определяет систему автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = a^i(x^1,...,x^n), \quad i=1,\dots,n,$$

определяющую, в свою очередь, в силу компактности M, поток $F(t,x)$ на M в смысле главы 6. Условие инвариантности меры μ для этого потока дается следующей теоремой.

Теорема 1.(Лиувилля). Для того, чтобы мера μ, (конечная или σ - конечная) с плотностью p класса C^∞, т.е. мера с дифференциалом $d\mu = p(x)dx^1...dx^n$, была инвариантной относительно $F(t,x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(p(x)a^i(x)) = 0.$$

Доказательство. Возьмем функцию $\varphi \in C^\infty(M)$, сосредоточенную в некоторой координатной окрестности U, т.е. такую, что замыкание множества $\{x \in M : \varphi(x) \neq 0\}$ содержится в U. Найдется такое $\delta > 0$, что при всех t, $|t| < \delta$, функция $\varphi(F(t,x))$ также будет сосредоточена в U. Для инвариантности меры μ необходимо и достаточно, чтобы для всех таких φ и δ имело место равенство

$$\int_M \varphi \cdot p(x)dx^1...dx^n = \int_M \varphi(F(t,x)) \cdot p(x)dx^1...dx^n$$

при $|t| < \delta$.Правая часть этого равенства непрерывно дифференцируема по t. Поэтому оно эквивалентно соотношению

$$\frac{d}{dt}\left(\int_M \varphi(F(t,x)) \cdot p(x)dx^1...dx^n \right) = 0$$

Но учитывая, что $\varphi(x) = 0$ при $x \notin U$, мы можем записать:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\int_M \varphi(F(t,x)) \cdot p(x)dx^1...dx^n \right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_U \varphi(F(t,x)) \cdot p(x)dx^1...dx^n \right)\Big|_{t=0} =$$

$$=\int_U\left(\sum_i a^i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)\cdot p(x)dx^1...dx^n=\int_U\left(\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}(p(x)a^i(x)\right)\cdot\varphi(x)dx^1...dx^n=$$

$$=\int_M\left(\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}(p(x)a^i(x)\right)\cdot\varphi(x)dx^1...dx^n.$$

Поскольку последняя цепочка равенств выполнена для любой функции φ, удовлетворяющей указанным выше условиям, из нее вытекает

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}(p(x)a^i(x))=0\ .$$

Теорема доказана.

Следствие. Рассмотрим наряду с системой уравнений

$$\dot{x}^i=a^i(x^1,...,x^n),\quad i=1,\dots,n,$$

систему $$\dot{x}^i=\psi(x^1,...,x^n)a^i(x^1,...,x^n),\quad i=1,\dots,n,$$

где $\psi(x)$ - положительная функция класса $C^\infty(M)$. Эта система также определяет некоторую однопараметрическую группу $\tilde{F}(t,x)$ диффеоморфизмов многообразия *M*. Ясно, что траектории у $\tilde{F}(t,x)$ те же, что у исходного потока *F*(*t*,*x*), а скорость движения каждой точки $x\in M$ под действием $\tilde{F}(t,x)$ в $\psi(x)$ раз больше, чем под действием *F*(*t*,*x*).

Говорят, что $\tilde{F}(t,x)$ получается из *F*(*t*,*x*) с помощью замены времени, определяемой функцией $\psi(x)$.

Допустим, что поток *F*(*t*,*x*) имеет гладкую инвариантную меру, задаваемую плотностью $p(x)\in C^\infty(M)$, $p(x)>0$. Тогда функция $\tilde{p}(x)=\dfrac{1}{\psi(x)}p(x)$ является плотностью инвариантной меры для $\tilde{F}(t,x)$.

Действительно, $\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{p}(x)\psi(x)a^i(x))=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}(p(x)a^i(x))$.

По теореме Лиувилля мера с плотностью $\tilde{p}(x)$ инвариантна относительно $\tilde{F}(t,x)$.

Теорема Лиувилля имеет локальный характер: поскольку векторное поле непрерывно, инвариантность меры μ достаточно проверять в окрестности любой точки.

Отметим также, что для системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}^i = \alpha_i, \quad i=1,\dots n,$$

заданной в циклических координатах на n - мерном торе T^n ($\alpha_1,...,\alpha_n$ - действительные числа), инвариантной мерой соответствующего потока $F(t,x)$ будет, очевидно, мера Лебега. При условии рациональной независимости чисел $\alpha_1,...,\alpha_n$ эта мера единственна.

Понятие динамической системы столь общее, что для получения содержательных результатов нужно, как правило, накладывать на систему те или иные дополнительные условия. Существует, однако, простое, но важное утверждение, справедливое в общем случае - так называемая теорема Пуанкаре о возвращении.

Определение 6. Пусть F - эндоморфизм пространства (M, $\wp$, μ) и $A \in \wp$. Точка $x \in A$ называется ***возвращающейся*** (в множество A), если $F^n(x) \in A$ хотя бы при одном $n > 0$.

Теорема 2 (теорема Пуанкаре о возвращении). Для любого эндоморфизма F и любого $A \in \wp$ почти все (по мере μ, $\mu(M)=1$) точки $x \in A$ - возвращающиеся.

Доказательство. Обозначим через B подмножество множества A, состоящее из всех невозвращающихся в A точек. Тогда $B \in \wp$, так как $B = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (F^{-n}(M \setminus A)) \right)$. Если $x \in B$, то все точки вида $F^n(x)$ не принадлежат A, n = 1, 2, ..., и, тем более $F^n(x) \notin B$, т.е. $x \notin F^{-n}(B)$. Значит, $B \cap F^{-n}(B) = \varnothing$, n = 1, 2,… . Отсюда следует, что множества B, $F^{-1}(B)$, $F^{-2}(B)$,… попарно не пересекаются. Действительно, при $0 \le n_1 \le n_2$

$$F^{-n_1}(B) \cap F^{-n_2}(B) = F^{-n_1}(B \cap F^{-(n_2-n_1)}(B)) = \varnothing .$$

Поэтому $\mu(M) = 1 \ge \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(B) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(F^{-n}(B)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(B\right)$.

Последнее неравенство может выполняться лишь при $\mu(B) = 0$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что на самом деле почти все точки $x \in A$ возвращаются в A бесконечно много раз. Действительно, если $F^k(x) \notin A$ при всех $k \ge l$, то x - невозвращающаяся точка для эндоморфизма F^l . По теореме 2 мера множества таких точек равна 0.

Пользуясь этим замечанием, докажем следующее полезное утверждение.

Лемма. Если $f(x)$ - положительная измеримая функция на M, то для почти всех $x \in M$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(F^k(x)) = +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим множества $A_m = \{x \in M : f(x) \geq 1/m\}$, m = 1,… . Для любой точки $x \in A_m$, возвращающейся в A_m бесконечно много раз, доказываемое неравенство, очевидно, справедливо. Но таким свойством обладают почти все $x \in A_m$. Ввиду того, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = M$, лемма доказана.

В главе 6 фазовым пространством динамической системы было метрическое пространство, но инвариантная мера a priori не была задана.
Возникает естественный вопрос о существовании инвариантных мер.

Мы будем рассматривать меры μ, заданные на σ - алгебре бэровских множеств пространства *M*. Такие меры называются бэровскими. В качестве σ - алгебры $\wp$ будем брать пополнение σ - алгебры бэровских множеств по соответствующей мере μ. Справедлива следующая важная

Теорема 3.(Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.) Для всякого непрерывного отображения F компактного метрического пространства M в себя существует нормированная бэровская мера μ, инвариантная относительно F .

Прежде чем доказывать эту теорему, напомним, что всякой бэровской мере μ, на M однозначно соответствует положительный линейный функционал l на пространстве $C(M)$: $l(f) = \int_M f(x) d\mu$.

Инвариантным относительно F мерам отвечают функционалы, инвариантные в том смысле, что $l(f(x)) = l(f(F(x)))$.

Иногда функционал мы будем обозначать той же буквой, что и соответствующую ему меру.

Доказательство теоремы 3. Пусть μ_0 - произвольная нормированная бэровская мера на M (например, сосредоточенная в одной точке:

$$\mu_0(f) = \int_M f d\mu_0 = f(x_0), x_0 \in M \text{).}$$

Рассмотрим последовательность мер $\mu_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu_0(f(F^k(x)))$, n=1,2,… .

Согласно теореме Тихонова (п. 0.3.3.) множество нормированных мер на бикомпакте M слабо* бикомпактно, поэтому последовательность $\{\mu_n\}$ имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть μ - одна из этих предельных точек, и $\{\mu_{n_s}\}$- слабо* сходящаяся к μ подпоследовательность последовательности $\{\mu_n\}$. Покажем, что мера μ инвариантна относительно F. Слабая* сходимость $\mu = w^* - \lim\limits_{n_s\to\infty} \mu_{n_s}$ означает, что $\int\limits_M f(x)d\mu = \lim\limits_{s\to\infty}\int\limits_M f(x)d\mu_{n_s}$

для любой функции $f \in C(M)$. Но

$$\left|\int\limits_M f(F(x))d\mu_{n_s} - \int\limits_M f(x)d\mu_{n_s}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n_s}\sum_{k=0}^{n_s-1}\int\limits_M f(F^{k+1}(x))d\mu_0 - \frac{1}{n_s}\sum_{k=0}^{n_s-1}\int\limits_M f(F^k(x))d\mu_0\right| =$$

$$= \frac{1}{n_s}\left|\int\limits_M f(F^{n_s}(x))d\mu_0 - \int\limits_M f(x)d\mu_0\right| \le \frac{2}{n_s}\max_{x\in M}|f(x)| \to 0$$

при $s\to\infty$. Переходя к пределу, получим, что $\int\limits_M f(F(x))d\mu = \int\limits_M f(x)d\mu$

и в силу произвольности $f \in C(M)$ теорема доказана.

Аналогичное утверждение справедливо и для потока, где в качестве $\mu_s(f)$

удобно выбрать $\mu_s(f) = \frac{1}{s}\int\limits_0^s dt\left(\int\limits_M f(F(t,x))d\mu_0\right)$, и выбрать из сети μ_s слабо*

сходящуюся подсеть.

Теперь, когда доказано существование инвариантных мер, теорему Пуанкаре о возвращении следует понимать так множество неустойчивых по Пуассону точек имеет меру нуль для любой инвариантной меры.

Определение 7. Измеримая функция g называется инвариантной относительно автоморфизма F (эндоморфизма F; потока $F(t,x)$; полупотока $F(t,x)$), если при всех $x \in M$ $g(Fx) = g(x) = g(F^{-1}x)$ (($g(Fx) = g(x)$, $g(F(t,x)) = g(x)$ при всех $t \in R$ $g(F(t,x)) = g(x)$ при всех $t \in R_+$) Иными словами, инвариантная функция принимает постоянное значение на всякой траектории динамической системы, т.е. инвариантная функция есть функция на траекториях.

Определение $7'$. Множество $A \in \wp$ называется ***инвариантным*** относительно автоморфизма F (эндоморфизма F потока $F(t,x)$; полупотока $F(t,x)$), если его характеристическая функция χ_A - есть инвариантная функция.

Как и в случае динамических систем на общих пространствах с мерой, естественно выделить класс «неразложимых» топологических динамических систем. Мы приведем следующие определения для случая дискретного времени, точнее, для гомеоморфизмов.

Определение 8. Гомеоморфизм $F: M \to M$ называется ***топологически транзитивным***, если для некоторой точки $x \in M$ ее траектория $\{F^n(x): -\infty < n < +\infty\}$ всюду плотна в M.

Следующие важные понятия характеризуют «более сильную» топологическую неразложимость.

Определение 9. Гомеоморфизм $F: M \to M$ называется ***минимальным***, если траектория $\{F^n(x): -\infty < n < +\infty\}$ любой точки $x \in M$ всюду плотна в M.

Теорема, которой мы посвятим следующий параграф, одна из самых важных в эргодической теории.

§ 2. Теорема Биркгофа –Хинчина.

Теорема 1. Пусть $(M,\wp,\mu)$ - пространство с нормированной мерой μ, и $f \in L^1(M,\wp,\mu)$.

Тогда

i) для почти каждого (в смысле меры μ) $x \in M$ существуют и равны пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^{-k}(x)) = = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} f((F^k(x)) \overset{\text{def}}{=} \overline{f}(x) \text{ -}$$

в случае автоморфизма F;

ii) для почти каждого $x \in M$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \overset{\text{def}}{=} \overline{f}(x)$ -

в случае эндоморфизма F;

iii) для почти каждого $x \in M$ существуют и равны пределы

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(F(s,x))ds = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(F(-s,x)ds = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^t f(F(s,x))ds \overset{\text{def}}{=} \overline{f}(x) \text{ в}$$

случае потока $F(t,x)$;

iv) для почти каждого $x \in M$ существует предел:

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(F(s,x)ds \overset{\text{def}}{=} \overline{f}(x)$ в случае полупотока $F(t,x)$}.

При этом $\overline{f}(Tx)=\overline{f}(x)$ или $\overline{f}(F(t,x))=\overline{f}(x)$ ($\overline{f}$ – инвариантная функция потока), если только правые части равенства существуют. Кроме того, $\overline{f}\in L^1(M,\wp,\mu)$ и $\int\limits_M \overline{f}(x)d\mu=\int\limits_M f(x)d\mu$.

Пределы, фигурирующие в теореме, называются временными средними или средними вдоль траектории .

Если, например, $\chi(A)$ характеристическая функция множества $A\subseteq M$, то $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_A(F^k(x))$ есть среднее число попаданий в множество A траектории точки x за время от 0 до n-1. Таким образом, эргодическая теорема Биркгофа – Хинчина утверждает существование для почти каждой точки x среднего числа попаданий в любое измеримое множество A.

В основе доказательства лежит важная лемма, называемая иногда максимальной эргодической теоремой. Мы приведем доказательство лишь для эндоморфизмов. Введём сначала некоторые обозначения.

Пусть $s_n(x)=s_n(x,f)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(F^k(x)),\ \ x\in M$, n=1,2,…, $s_0(x)\equiv 0$.

Пусть, далее, $A=A(f)=\{x\in M:\sup\limits_{n\geq 0}s_n(x)>0\}$.

Лемма 1. (Максимальная эргодическая теорема). $\int\limits_A f(x)d\mu\geq 0$.

Доказательство леммы проведём позже, а сейчас получим из неё эргодическую теорему.

Для любых рациональных a, b, $a<b$ положим

$$E_{a,b}=\{x\in M:\underline{\lim}\frac{1}{n}s_n(x)<a<b<\overline{\lim}\frac{1}{n}s_n(x)\}.$$

Очевидно, что $E_{a,b}\in\wp$ и для доказательства существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}s_n(x)$ достаточно показать, что $\mu(E_{a,b})$=0 при любых a, b. Зафиксируем a,b, положим E=$E_{a,b}$ и рассмотрим функцию $g(x)=\begin{cases} f(x)-b, x\in E\\ 0, x\notin E\end{cases}$.

Применяя к ней лемму, получим $\int\limits_{A(g)} g(x)d\mu \ge 0,$ где

$$A(g) = \{x \in M : \frac{1}{n}\sup_{n\ge 1} s_n(x,g) > 0\} = \{x \in M : \sup \frac{1}{n} s_n(x; f) > b\}.$$

Ясно, что $A(g) \supseteq E$. Из инвариантности множества E вытекает, что $s_n(x,g) \equiv 0$ при $x \notin E$, т.е. $A(g)=E$, и мы получаем, что $\int\limits_E f(x)d\mu \ge b\mu(E)$.

Аналогично, рассматривая функцию $g'(x) = \begin{cases} a - f(x), x \in E, \\ 0, x \notin E, \end{cases}$

получим $\int\limits_E f(x)d\mu \le a\mu(E)$. Таким образом, μE=0 и почти всюду существует предел $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}s_n(x; f)$. Так как при любом n

$$\int\limits_M \frac{1}{n}s_n(x; f)d\mu \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\, f(F^k(x))\,|\, d\mu = \int\limits_M |\, f(x)\,|\, d\mu < \infty, \text{ то } \overline{f} \in L^1(M, \wp, \mu).$$

Осталось доказать равенство $\int\limits_M \overline{f} d\mu = \int\limits_M f d\mu$. Рассмотрим множество $C_{a,b} = \{x \in M : a < \overline{f}(x) < b\}$. Как и раньше, с помощью леммы 1 получим $a\mu(C_{a,b}) \le \int\limits_{C_{a,b}} f d\mu \le b\mu(C_{a,b})$. Кроме того, очевидно

$a\mu(C_{a,b}) \le \int\limits_{C_{a,b}} \overline{f} d\mu \le b\mu(C_{a,b})$. Отсюда $\left|\int\limits_{C_{a,b}} \overline{f} d\mu - \int\limits_{C_{a,b}} f d\mu\right| \le (b-a)\mu(C_{a,b})$. Зафиксируем натуральное q и рассмотрим всевозможные пары a, b вида $a=p/2^q$, $b=(p+1)/2^q$; $p=0,\pm 1, \pm 2, \ldots$. Мы можем считать, не ограничивая общности, что $\mu(\{x: f(x) = p/2^q\}) = \mu(\{x: \overline{f}(x) = p/2^q\}) = 0$. Тогда

$$\left|\int\limits_M \overline{f} d\mu - \int\limits_M f d\mu\right| \le \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{C_{\frac{p}{2^q},\frac{p+1}{2^q}}} \overline{f} d\mu - \int\limits_{C_{\frac{p}{2^q},\frac{p+1}{2^q}}} f d\mu\right| \le \sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^q}\mu(C_{\frac{p}{2^q},\frac{p+1}{2^q}}) = \frac{1}{2^q}.$$

При $q \to \infty$ получится, что $\int\limits_M \overline{f} d\mu = \int\limits_M f d\mu$. Теорема доказана.

Доказательство леммы. При любом $k \geq 0$, $s_k(F(x)) = s_{k+1}(x) - f(x)$.

Зафиксируем $n \geq 1$ и возьмём максимум по k=0,1,…, n-1 от обеих частей этого равенства. Сначала для левой части запишем:

$$\max_{0\leq k\leq n-1} s_k(F(x)) = \max_{0\leq k\leq n-1}(0, f(F(x)),..., f(F(x)) + f(F^2(x)) + ... + f(F^n(x))) =$$

$$= \max_{0\leq k\leq n-1}(f(x), f(x) + f(F(x)),..., f(x) + f(F(x)) + ... + f(F^n(x))) - f(x).$$

Для правой части запишем: $\max\limits_{0\leq k\leq n-1}(s_{k+1}(x) - f(x)) =$

$$= \max_{0\leq k\leq n-1}(f(x), f(x) + f(F(x)),..., f(x) + ... + f(F^n(x))) - f(x) =$$

$$= \max_{0\leq k\leq n-1}(0, f(F(x)),..., f(F(x)) + ... + f(F^n(x))).$$

Поэтому обозначая $\Phi_n(x) = \max(0; s_1(x),..., s_n(x))$,

$\Phi_n^*(x) = \max(s_1(x),..., s_n(x))$, получим $\Phi_{n+1}^*(x) - f(x) = \Phi_n(F(x))$.

Отсюда $f(x) = \Phi_{n+1}^*(x) - \Phi_n(F(x)) \geq \Phi_n^*(x) - \Phi_n(F(x))$.

Пусть $A_n = \{x \in M : \Phi_n(x) > 0\}$.

Тогда $\int\limits_{A_n} f(x) d\mu \geq \int\limits_{A_n} \Phi_n^*(x) d\mu - \int\limits_{A_n} \Phi_n(F(x)) d\mu$.

Но для $x \in A_n$ имеет место равенство $\Phi_n^*(x) = \Phi_n(x)$, а для $x \notin A_n$ - равенство $\Phi_n(x) = 0$. Поэтому $\int\limits_{A_n} \Phi_n^*(x) d\mu = \int\limits_{A_n} \Phi_n(x) d\mu = \int\limits_M \Phi_n(x) d\mu$. Кроме того, из неотрицательности Φ_n $\int\limits_{A_n} \Phi_n(F(x)) d\mu \leq \int\limits_M \Phi_n(F(x)) d\mu$. Окончательно получаем $\int\limits_{A_n} f(x) d\mu \geq \int\limits_M \Phi_n(x) d\mu - \int\limits_M \Phi_n(F(x)) d\mu = 0$.

Последнее равенство следует из того, что F сохраняет меру μ. Устремим теперь $n \to \infty$. Множество A_n будет, очевидно, стремиться к A в том смысле, что $\mu\ (A_n \triangle A) \to 0$. Поэтому при $n \to \infty$ получим требуемое неравенство. Лемма и вместе с ней и теорема доказаны.

Определение 1. Динамическая система называется ***эргодической***, если для любого инвариантного множества A его мера $\mu(A)$ равна 0 или 1.

Утверждение 1. Если динамическая система эргодична, то всякая инвариантная функция равна постоянной на множестве полной меры.

Доказательство. Если $g(x)$ - инвариантная функция, то при любом a множество $C_a = \{x : g(x) < a\}$ инвариантно. Следовательно, $\mu(C_a)$ равна 0 нли 1. Утверждение доказано.

Пусть F - эргодическая система. Тогда для любой функции $f \in L^1(M, \wp, \mu)$ функция $\overline{f}$, фигурирующая в эргодической теореме Биркгофа — Хинчина, инвариантна и, следовательно, по утверждению 1 равна постоянной почти всюду. Так как $\int\limits_M f(x)d\mu = \int\limits_M \overline{f}(x)d\mu$, то мы получаем, что $\overline{f}(x) = \int\limits_M f(x)d\mu$ почти всюду. Интеграл $\int\limits_M f(x)d\mu$ есть среднее функции f по пространству M, или пространственное среднее. Поэтому эргодическую теорему в случае эргодической динамической системы можно сформулировать так:

Для почти каждой точки $x \in M$ временное среднее равно пространственному среднему**.**

Определение 9. Гомеоморфизм $F : M \to M$ называется ***строго эргодическим***, если нормированная инвариантная относительно F бэровская мера единственна.

Покажем теперь, что для строго эргодических динамических систем (нормированная инвариантная бэровская мера единственна) справедлив усиленный вариант эргодической теоремы Биркгофа - Хинчина (что оправдывает их название).

Теорема 2. Пусть F - гомеоморфизм компактного метрического пространства M, и μ - нормированная инвариантная относительно F бэровская мера. Следующие утверждения эквивалентны:

i) F строго эргодичен;

ii) для любой функции $f \in C(M)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x)) = \int_M f(x)d\mu \overset{\text{def}}{=} \mu(f)$$

в каждой точке $x \in M$;

iii) для любой функции $f \in C(M)$ временные средние

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x))$ равномерно сходятся к $\mu(f)$.

Доказательство основано на следующей лемме:

Лемма 2. Пусть F - строго эргодический гомеоморфизм, μ - единственная инвариантная мера, которой отвечает инвариантный нормированный положительный линейный функционал на $C(M)$. Тогда любой (не обязательно положительный) инвариантный непрерывный линейный функционал l на $C(M)$ имеет вид

$$l(f) = \lambda\mu(f), \quad \lambda \in R.$$

Доказательство. Любому непрерывному линейному функционалу l на пространстве $C(M)$ можно сопоставить положительный линейный функционал $|l|$ (полную вариацию l), причем

а) для функций $f \in C(M)$, $f \geq 0$,

$$|l|(f) = \sup_{|\varphi|\leq f, \varphi\in C(M)} l(\varphi)$$

б) разность $l_1 = |l| - l$ - также положительный линейный функционал.

Пусть теперь l - непрерывный линейный функционал, инвариантный относительно F,тогда $|l|$ тоже инвариантен. Действительно,

$$|l|(f(F(x))) = \sup_{|\varphi(x)|\leq f(F(x))} l(\varphi(x)) = \sup_{|\varphi(F^{-1}(x))|\leq f(x)} l(\varphi(F^{-1}(x))) =$$

$$= \sup_{|\psi(x)|\leq f(x)} l(\psi(x)) = |l|(f(x))$$

для $f \geq 0$, а значит, и для всех $f \in C(M)$. Так как F строго эргодичен, а $|l|$ - положительный линейный функционал, т.е. мера, то $|l| = c\mu$, $c \in R$. Аналогично $l_1 = c_1\mu$, $c_1 \in R$. Поэтому $l = |l| - l = (c - c_1)\mu$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть T строго эргодичен. Рассмотрим функции $f \in C(M)$ вида $f(x) = g(F(x)) — g(x)$, $g \in C(M)$ (их называют иногда функциями, когомологичными нулю). Для таких

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[g(F^{k+1}(x)) - g(F^k(x))] =$$

$$= \frac{1}{n}[g(F^n(x)) - g(x)] \le \frac{2}{n}\max_{x\in M}|g(x)| \to 0$$

при $n\to\infty$. При этом $\mu(f) = \int\limits_M f(x)d\mu = \int\limits_M g(F(x))d\mu - \int\limits_M g(x)d\mu = 0$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x)) = \mu(f)$ и сходимость равномерная.

Функции, когомологичные нулю, образуют линейное многообразие в $C(M)$. Докажем, что замыкание L этого многообразия в $C(M)$ совпадает с подпространством C_0 функций $f\in C(M)$ таких, что $\mu(f)=0$. Ясно, что $L\subseteq C_0$. Допустим, вопреки нашему утверждению, что $L\ne C_0$, т.е. найдется функция f_0, $\mu(f_0)=0$, но $f_0\notin L$. По теореме Хана - Банаха существует такой непрерывный линейный функционал l на пространстве $C(M)$, что $l(f)=0$ для $f_0\in L$, $l(f_0) = 1$. Ясно, что l - инвариантный линейный функционал, но он не может иметь вид $l(f)=\lambda\mu(f)$, так как $\mu(f_0)=0$, $l(f_0) = 1$. Противоречие с леммой 2 доказывает, что $L = C_0$.

Пусть теперь $f\in C_0(M)$. Для заданного $\varepsilon>0$ найдем функцию $f_\varepsilon = g_\varepsilon(F(x)) - g_\varepsilon(x)$ такую, что $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon/3$. Получим:

$$\left\|f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x))\right\| \le \|f - f_\varepsilon\| + \left\|f_\varepsilon - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_\varepsilon(F^k(x))\right\| +$$

$$+\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x)) \ - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_\varepsilon(F^k(x))\right\| = \Sigma_1^{(n)} + \Sigma_2^{(n)} + \Sigma_3^{(n)}.$$

Так как $\Sigma_1^{(n)} < \varepsilon/3$, $\Sigma_3^{(n)} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|f(F^k(x)) - f_\varepsilon(F^k(x))\right\| < \varepsilon/3$,

а $\Sigma_2^{(n)}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\|f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x))\right\| \le \varepsilon$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ импликация $\mathrm{i}\Rightarrow\mathrm{iii}$ доказана для любой функции $f\in C_0(M)$, а значит, и для любой функции $f\in C(M)$.

Импликация $\mathrm{iii}\Rightarrow\mathrm{ii}$ очевидна, поэтому осталось доказать, что $\mathrm{ii}\Rightarrow\mathrm{i}$.

Пусть ν - любая инвариантная нормированная бэровская мера для F. Из ii по теореме о переходе к пределу под знаком интеграла для равномерно ограниченных последовательностей функций вытекает, что для любой $f\in C(M)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_M \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x))d\nu = \int_M \mu(f)d\nu = \mu(f).$$

С другой стороны, в силу инвариантности ν

$$\nu(f) = \nu\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x))\right) = \int_M \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x))d\nu.$$

Таким образом, $\nu(f) = \mu(f)$. Теорема доказана.

Задача. Доказать теоремы 1 и 2 для потоков.

Из теоремы 2 вытекает следующее следствие.

Следствие. Если гомеоморфизм F строго эргодичен и инвариантная мера μ, такова, что $\mu(G) > 0$ для любого непустого открытого множества $G \subseteq M$, то F - минимальный гомеоморфизм т.е. траектория $\{F^n(x): -\infty < n < +\infty\}$ любой точки $x \in M$ всюду плотна в M.

Доказательство. Пусть $G \subseteq M$ - непустое открытое множество. Так как $\mu(G) = \sup\limits_{V\subseteq G}\mu(V)$, где верхняя грань берется по всем замкнутым множествам $V \subseteq G$, то найдется замкнутое V_0, $\mu(V_0) > 0$. Множества V_0 и $M \setminus G$ не пересекаются и замкнуты, поэтому существует функция $f \in C(M)$, $f \geq 0$ такая, что $f(x)=1$ при $x \in V_0$ и $f(x)=0$ при $x \in M \setminus G$. Ясно, что $\int\limits_M f(x)d\mu = \mu(f) > 0$. Для произвольной точки $x_0 \in M$, в силу теоремы 2, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(F^k(x_0)) = \mu(f) > 0$, поэтому найдется такое n, что $f(F^n(x_0)) > 0$, т.е. $F^n(x_0) \in G$. Это и означает, что траектория точки x_0 всюду плотна, т.е. F - минимальный гомеоморфизм.

Теорема 3. Если гомеоморфизм F минимален, то $\mu(G) > 0$ для любой нормированной инвариантной меры μ и любого непустого открытого множества $G \subseteq M$.

Доказательство. Если μ - произвольная нормированная инвариантная мера на M, то найдется точка $x_0 \in M$, для любой окрестности $U = U(x_0)$ которой $\mu(U) > 0$. Действительно, если бы для каждой $x \in M$ нашлась окрестность, имеющая нулевую меру, то отсюда следовало бы, что $\mu(M) = 0$. Рассмотрим траекторию точки x_0. Так как эта траектория всюду плотна, то для данного открытого $G \subseteq M$ найдется такое n, что $F^n(x_0) \in G$. Но поскольку F есть гомеоморфизм, то и образ $F^n(U(x_0))$ некоторой достаточно малой окрестности этой точки содержится в G. Из инвариантности меры μ получаем, что

$\mu(G) \geq \mu(F^n(U)) = \mu(U) > 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим простейший тип диффеоморфизмов тора - так называемые сдвиги.

Пусть $T^n = \underbrace{S^1 \times ... \times S^1}_{n}$ есть произведение n окружностей. Точку на торе можно задавать или в мультипликативной записи, как систему n комплексных чисел $(z_1,\ldots,z_n)$, $|z_k| = 1,\ 1 \leq k \leq n$, или, полагая $z_k = e^{2\pi i x_k}$ в аддитивной записи, как систему n действительных чисел $(x_1,\ldots,x_n)$ рассматриваемых по (mod 1). В этом случае можно считать, что $0 \leq x_k < 1,\ 1 \leq k \leq n$.

Пользуясь аддитивной записью, определим на T^n преобразование F: для $x = (x_1,\ldots,x_n) \in T^n$ положим

$$Fx = (x_1 + \alpha_1 \bmod(\ 1), x_2 + \alpha_2 \bmod(\ 1), ..., x_n + \alpha_n \bmod(\ 1)),$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_n$ - фиксированный набор действительных чисел. Преобразование F называется ***сдвигом на торе***, а в одномерном случае - ***поворотом окружности.*** Ясно, что мера Лебега ρ на T^n, для которой $d\rho = \prod_{k=1}^{n} dx_k$, инвариантна относительно F.

Теорема 4. Для эргодичности преобразования F необходимо и достаточно, чтобы числа $1, \alpha_1, ..., \alpha_n$ были рационально независимы, т.е. чтобы равенство вида $\sum_{k=1}^{n} s_k \alpha_k = p$,где p, s_k-целые числа, было бы возможно лишь при $s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0$.

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Установим для этого, что всякая инвариантная (mod 0) (с точностью до множества меры нуль) относительно F измеримая функция $f(x)$ есть константа (mod 0).

Функцию f, без ограничения общности, можно считать ограниченной. Действительно, в противном случае положим $E_N(f) = \{x \in T^n : |f(x)| \leq N\}$, χ_N - характеристическая функция множества E_N. Из инвариантности f вытекает инвариантность функций $f \cdot \chi_N$ (N =1,2,…). Доказав, что $f \cdot \chi_N$ =const(mod 0) , мы можем получить тот же результат для f предельным переходом $N \to +\infty$.

Ограниченную измеримую функцию $f(x)$ на T^n можно разложить в ряд Фурье, сходящийся в среднем квадратичном: $f(x)=\sum_s c_s \exp(2\pi i(s,x))$, где x - $(x_1,\ldots,x_n)$, $s = (s_1,\ldots,s_n)$, $(s,x)=\sum_{k=1}^{n} s_k x_k$, а суммирование распространяется на все наборы целых чисел $s = (s_1,\ldots,s_n)$.

Из инвариантности f получаем:

$$f(Fx)=\sum_s c_s \exp(2\pi i(s,x+\alpha))=\sum_s c_s \exp(2\pi i(s,\alpha)\exp(2\pi i(s,x))=$$

$$=f(x)=\sum_s c_s \exp(2\pi i(s,x)) \bmod(\ 0).$$

В силу единственности коэффициентов Фурье, $c_s = c_s \exp(2\pi i(s,\alpha))$, т.е. при каждом s или $c_s = 0$, или $\exp(2\pi i(s,\alpha))=1$, т.е. $(s,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} s_k\alpha_k = p$ - целое. Но по условию последнее равенство возможно лишь при $s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0$.

Итак, среди коэффициентов Фурье лишь c_0 может быть отличен от нуля. Это и означает, что $f(x) = c_0 = \text{const}$ (mod 0).

Докажем теперь необходимость. Пусть существует такой ненулевой вектор $s= (s_1,\ldots,s_n)$ с целочисленными координатами, что $(s,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} s_k\alpha_k = p$ - целое.

Тогда функция $f(x)=\exp(2\pi i(s,x))$ отлична от константы (mod 0) и инвариантна относительно F:

$$f(Fx)=\exp(2\pi i(s,x+\alpha))=\exp(2\pi i(s,x))\exp(2\pi i(s,\alpha))=f(x).$$

Значит, F не эргодично. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть F - сдвиг на торе, ρ мера Лебега на T^n, $d\rho=\prod_{k=1}^{n} dx_k$, , и числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ рационально независимы. Тогда F строго эргодичен, т.е. мера Лебега ρ на T^n, $d\rho=\prod_{k=1}^{n} dx_k$, единственная F - инвариантная нормированная бэровская мера.

Доказательство. В силу теоремы 2 , строгая эргодичность означает, что для любой непрерывной функции f на T^n $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k x)=\int_{T^n} f d\rho$ равномерно для всех $x\in T^n$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и, пользуясь равномерной непрерывностью f, найдем такое $\delta>0$, что $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon/2$ при $d(x',x'')<\delta$.

Так как по теореме 4 сдвиг F эргодичен, то равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(F^k x)=\int\limits_{T^n} f d\rho$ выполнено на некотором множестве $A\subseteq T^n$, $\rho(A)=1$. Это множество всюду плотно на T, и значит, можно выбрать конечную δ- сеть $x_1,...,x_r\in A$. Пусть n_0 выбрано так, что при всех $n>n_0$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k x_i)-\int\limits_{T^n} f(x)d\rho\right|<\varepsilon/2,\qquad 1\le i\le r.$$

Для любой точки $x\in T^n$ при некотором i, $1\le i\le r$, будет $d(x,x_i)<\delta$. Ясно, что тогда при любом k выполнено $d(F^k x,F^k x_i)<\delta$, и поэтому

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k x)-\int\limits_{T^n} f(x)d\rho\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(F^k x_i)-f(F^k x)\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(F^k x_i)-\int\limits_{T^n} f(x)d\rho\right|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

при $n>n_0$. Теорема доказана.

§ 3. Разложение инвариантных мер

7.3.1. Теорема Крейна — Мильмана

Определение. Пусть K - некоторое подмножество вещественного или комплексного линейного пространства X. Непустое подмножество $M\subseteq K$ называется ***крайним подмножеством*** K, если выпуклая комбинации вида $\alpha k_1+(1-\alpha)k_2, 0<\alpha<1$, двух точек k_1 и k_2 множества K принадлежит M только в том случае, когда обе точки k_1 и k_2 лежат в M. Крайнее подмножество множества K, состоящее из одной точки, называется ***крайней точкой*** K.

Пример. В трёхмерном евклидовом пространстве поверхность замкнутого шара является крайним подмножеством этого шара, а всякая точка этой поверхности представляет собой крайнюю точку.

Теорема (Крейн — Мильман). Всякое непустое бикомпактное выпуклое подмножество K локально выпуклого линейного топологического пространства X содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

Напомним, что линейное топологическое пространство называется ***локально выпуклым пространством***, если всякое открытое множество этого пространства, содержащее точку x=0, содержит также некоторое выпуклое, уравновешенное, поглощающее открытое множество.

Доказательство. Само множество K служит крайним подмножеством для K. Обозначим через $\mathbb{N}$ совокупность всех бикомпактных крайних подмножеств M множества K. Упорядочим $\mathbb{N}$ с помощью отношения включения. Ясно, что если $\mathbb{N}_1$ -линейно упорядоченное множество в $\mathbb{N}$, то непустое множество $\bigcap\limits_{M\in\mathbb{N}_1} M$ служит бикомпактным крайним подмножеством в K, которое представляет собой миноранту для $\mathbb{N}_1$. Следовательно по лемме Цорна семейство $\mathbb{N}$ содержит минимальный элемент M_0. Допустим, что в M_0 входят две различные точки x_0 и y_0. Тогда на X определен непрерывный линейный функционал l такой, что $l(x_0)\neq l(y_0)$. Можно считать, что $\mathrm{Re}(l(x_0))\neq \mathrm{Re}(l(y_0))$. Так как множество M_0 бикомпактно, подмножество

$$M_1=\{x\in M_0:\mathrm{Re}\,l(x)=\inf_{y\in M_0}\mathrm{Re}(l(y))$$

является собственным в M_0. Но с другой стороны, если k_1 и k_2 - такие две точки из K, что $\alpha k_1+(1-\alpha)k_2\in M_1$ при некотором значении α, удовлетворяющем неравенству $0<\alpha<1$, то, поскольку M_0 - крайнее подмножество, обе точки k_1 и k_2 должны принадлежать M_0. Из определения множества M_1 вытекает, что k_1 и k_2 лежат в M_1. Следовательно, M_1 является замкнутым крайним собственным подмножеством в M_0. Но последнее заключение противоречит тому, что M_0 - минимальный элемент из $\mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что M_0 состоит из одной точки которая и является крайней точкой множества K.

Следствие. Пусть K - непустое бикомпактное выпуклое подмножество вещественного локально выпуклого линейного топологического пространства X. Обозначим через E совокупность всех крайних точек множества K. Тогда K совпадает с наименьшим замкнутым множеством, содержащим все ***выпуклые комбинации*** вида $\sum\limits_i \alpha_i e_i$ ($\alpha_i\geq 0,\sum\limits_i\alpha_i=1$) точек $e_i\in E$, т.е. K представляет собой замыкание ***выпуклой оболочки*** Conv(E) множества E.

Доказательство. Множество $\overline{\mathrm{Conv}}(E)$ принадлежит K, так как K бикомпактно, выпукло и $E\subseteq K$. Допустим, что существует точка $k_0\in(K\setminus\overline{\mathrm{Conv}}(E))$. В этом случае можно выбрать точку $c\in\overline{\mathrm{Conv}}(E)$ так, что $k_0-c\notin(\overline{\mathrm{Conv}}(E)-c)$. Множество $\left(\overline{\mathrm{Conv}}(E)-c\right)$ выпукло, бикомпактно и содержит точку x =0, следовательно, по следствию из теоремы Хана - Банаха, существует непрерывный вещественный функционал l на X, такой, что $l(k_0 — c)>1$ и $l(k - a)\leq 1$ при

$(k-c)\in(\overline{\mathrm{Conv}}(E)-c)$. Положим $K_1=\{x\in K: l(x)=\sup\limits_{y\in K} l(y)\}$. Тогда, поскольку $k_0\in K$, множество $K_1\cap E$ должно быть пустым. Кроме того, так как множество K бикомпактно, K_1, представляет собой замкнутое крайнее подмножество в K. С другой стороны, всякое крайнее подмножество множества K_1, является также крайним подмножеством в K, и поэтому любая крайняя точка из K_1, (существование таких точек вытекает из предыдущей теоремы) является также крайней точкой множества K. Но множество $K_1\cap E=\varnothing$, как было показано, пусто, и мы приходим к противоречию.

Пример. Обозначим через $C(M)$ пространство вещественных непрерывных функций $f(x)$, заданных на бикомпактном метрическом пространстве со счетной базой M с нормой $\|f\|=\max\limits_{x\in M}|f(x)|$. Сопряженным пространством $X=C'(M)$ служит пространство вещественных бэровских мер на M с ограниченными полными вариациями. Единичный шар K пространства X бикомпактен в слабой* топологии X (см. п.0.3.3.). Нетрудно заметить, что между крайними точками из K и линейными функционалами вида $l(x_0)(f(x))=f(x_0)$, $x_0\in M$, существует взаимно однозначное соответствие. В таком случае сформулированное следствие означает, что всякий линейный функционал $l\in X$ может быть представлен как слабый* предел функционалов вида $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i l(x_i)$, где $\alpha_i>0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ и $x_i\in M$.

Множество нормированных инвариантных мер – бикомпактно в слабой* топологии пространства локально выпуклого пространства $X=C'(M)$ и допускает приведенное преставление. Указанное представление не связано с инвариантностью меры, однако играет существенную роль. Как мы уже договаривались функционал и соответствующую ему меру обозначаем одним символом, т.е. $\mu(f)=\int\limits_M f(x)d\mu$.

п.7.3.2. Разложение инвариантных мер

В этом пункте мы рассмотрим всевозможные инвариантные меры на компактном метрическом пространстве и построим фундаментальную систему мер такую, что любая инвариантная мера является слабым* пределом выпуклых линейных комбинаций из выбранной системы.

Из теоремы Биркгофа-Хинчина следует, что для любой инвариантной меры μ и для любой непрерывной функции $f \in C(M)$ предел

$\overline{f}(x) = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(F(s,x))ds$ существует μ-п. в. и $\int\limits_M f(x)d\mu = \int\limits_M \overline{f}(x)d\mu$.

Допустим теперь, что некоторая последовательность ${}_1f$, ${}_2f$, ${}_3f$, … плотна в нормированном линейном пространстве $C(M)$. Существование такой последовательности гарантируется компактностью метрического пространства M. Применяя теорему Биркгофа – Хинчина к последовательности ${}_1f$, ${}_2f$, ${}_3f$, …, и объединяя все множества μ- меры нуль, на которых условие существования предела не выполняется, мы можем построить такое множество N нулевой μ-меры , что для всякого $x \in E_0 = M \setminus N$ и любой функции $f \in C(M)$ существует

$$\overline{f}(x) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(F(s,x))ds.$$

Определение 1. Точка $x \in M$ называется ***квазирегулярной***, если для любой непрерывной функции $f(x)$ существует $\lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(F(s,x))ds$.

Из теоремы Биркгофа-Хинчина следует, что для любой инвариантной меры μ, мера множества квазирегулярных точек E_0 равна единице. Инвариантность множества E_0 следует из оценки

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(F(s,x))ds - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(F(s+t,x))ds\right| \le \frac{2t}{\tau}\max|f|,$$

аналогичной оценки, приведенной в теореме 3 (Крылова-Боголюбова) (п.7.1.). Мы будем говорить, что бэровскому множеству $U \subseteq M$ соответствует ***максимальная вероятность***, если $\mu(M \setminus U) = 0$ для всякой инвариантной меры μ. Ясно, что таким свойством будет обладать множество $x \in E_0 \subseteq M$, для которых $\lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(F(s,x))ds$ существует при любом выборе функции $f \in C(M)$.

Рассмотрим систему мер, определенную равенством

$$\mu(\tau,x)(f) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(F(s,x))ds.$$

Определение 2. Слабый* предел мер $\mu(\tau, x)$ при $\tau \to \infty$ называется ***индивидуальной мерой***, соответствующей квазирегулярной точке $x \in E_0$ и обозначается $\mu_x(f) = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(F(s,x))ds$.

Заметим, что множество E_0 принадлежит σ - алгебре $\wp$, и мера μ_x рассматриваемая как функция точки $x \in E$ также $\wp$ измерима.

Введём теперь соотношение между индивидуальной мерой μ_x и любой инвариантной, нормированной мерой μ. Пусть $f \in C(M)$, учитывая, что для любой инвариантной меры μ мера множества $\mu(E_0) = 1$, получаем:

$$\int\limits_M f(y)d\mu = \int\limits_M f(F(t,y))d\mu = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau dt \int\limits_M f(F(t,y))d\mu =$$

$$= \int\limits_E d\mu\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(F(t,x))dt\right) \to \int\limits_E d\mu \int\limits_M f(x)d\mu_x, \text{ при } \tau \to \infty.$$

Переходя от $f \in C(M)$ к характеристической функции открытого множества G, учитывая измеримость функции μ_x и соответственно возможность определить $\int\limits_E \mu_x(A)d\mu$ для любого A из σ - алгебре $\wp$, как меру получаем соотношение: $\mu(A) = \int\limits_E \mu_x(A)d\mu$.

Итак установлена

Теорема 1. Всякая инвариантная мера μ может быть представлена в виде выпуклой комбинации инвариантных мер $\mu_x(A)$ (здесь x рассматривается как параметр).

Таким образом, мы можем сделать вывод, что

$$M_2 = \{x \in M : x \in M_1 = E_0, \mu_x(M_1) = 1\}$$

является множеством максимальной вероятности.

Для всякой функции $f \in C(M)$ и любой инвариантной меры μ имеет место

равенство $$\int\limits_{M_2}\left(\int\limits_{M_2}\left(\overline{f}(y) - \overline{f}(x)\right)^2 d\mu_x\right)d\mu = 0,$$

так как левая часть равна выражению

$$\int\limits_{M_2} d\mu \left(\int\limits_{M_2} \overline{f}^2(y)d\mu_x - 2\int\limits_{M_2} \overline{f}(x)d\mu \left(\int\limits_{M_2} \overline{f}(y)d\mu_x \right) + \int\limits_{M_2} \overline{f}^2(x)d\mu \cdot \int\limits_{M_2} d\mu_x \right) =$$

$$= \int\limits_{M_2} \overline{f}^2(y)d\mu - 2\int\limits_{M_2} \overline{f}^2(x)d\mu + \int\limits_{M_2} \overline{f}^2(x)d\mu = 0 .$$

Поскольку $M_2 = \{x \in M : x \in M_1 = E_0, \mu_x(M_1) = 1\}$ и справедливы соотношения $\overline{f}(x) = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} f(F(t,x))dt = \int\limits_{M_1} f(y)d\mu_x = \int\limits_{M_1} \overline{f}(y)d\mu_x$ и

$\overline{f}(x) = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} f(F(s,x))ds$. Применяя полученное равенство к последовательности ${}_1f$, ${}_2f$, ${}_3f$, … , видим, что $M_3 = \{x \in M_2 : \int\limits_{M_2} \left(\overline{f}(y) - \overline{f}(x)\right)^2 d\mu_x = 0$ для всех функций $f \in C(M)\}$ является множеством максимальной вероятности.

Мы можем теперь установить так называемое эргодическое разложение *M*.

Определение 3. Инвариантная мера μ ***транзитивна,*** если при любом разбиении *M* на объединение двух измеримых инвариантных множеств без общих точек *A* и *M\A* из $\mu(A) > 0$ следует $\mu(M \setminus A) = 0$.

Определение 4. Множество точек, для которых индивидуальные меры транзитивны, называем точками транзитивности и обозначаем E_T.

Определение 5. Точку $x \in E \subset M$ называют точкой плотности, если для любого $\varepsilon > 0$ мера множества $\mu_x(B(x,\varepsilon)) > 0$. Множество точек плотности обозначаем E_D.

Положим для любого $x \in M_3$ $E_x = \{y \in M_3 : \overline{f}(y) = \overline{f}(x)$ для всех $f \in C(M)\}$.

Мы можем теперь доказать, что всякое множество вида E_x содержит некоторое множество $\widehat{E}_x$, обладающее следующими свойствами: $\mu(\widehat{E}_x) = \mu(E_x)$ и все точки $y \in \widehat{E}_x$ точки плотности.

Доказательство. Из определения множества M_3 видно, что $\overline{f}(y) = \overline{f}(x)$ и для любого шара $B(y,r)$ с центром в точке *y* и радиуса *r* $\mu_x(B(y,r) > 0$. Следовательно, $\mu(E_x) = \mu(M_3) = 1$. Построим в E_x ε-сети для

$\varepsilon = 1/m\,(m$= 1, 2, 3, . . .); пусть это будут $\{x_1^{(m)},...,x_{n(m)}^{(m)}\}$. Тогда

$E_x \subseteq \bigcup_{k=1}^{n(m)} B(x_k^{(m)},1/m) = \bigcup_{k=1}^{n(m)} B_{k,m}$.

Для каждой точки $x_k^{(m)}$ строим непрерывную функцию:

$$\varphi_{k,m}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_{k,m}; \\ 2 - md(x,x_k^{(m)}), & 1/m \le d(x,x_k^{(m)}) \le 2/m; \\ 0, & d(x,x_k^{(m)}) \ge 2/m. \end{cases}$$

Для точки $y \in E_x$ полагаем: $\Phi_{k,m}(y) = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \varphi_{k,m}(F(t,y)dt$.

По теореме Биркгофа – Хинчина это - инвариантная функция. Определим инвариантное множество $U_{k,m} = \{y \in E_x : \Phi_{k,m}(y) = 0\}$. Пусть μ- любая инвариантная мера; пользуясь инвариантностью меры μ и множеств $U_{k,m}$:

$$0 = \int\limits_{U_{k,m}} \Phi_{k,m}(y)d\mu = \int\limits_{U_{k,m}} \left(\lim_{\tau\to\infty} \int\limits_0^\tau \varphi_{k,m}(F(t,y))dt \right) d\mu =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau dt \left(\int\limits_{U_{k,m}} \varphi_{k,m}(F(t,y))d\mu \right) = \int\limits_{U_{k,m}} \varphi_{k,m}(y))d\mu \ge \int\limits_{U_{k,m}\cap B_{k,m}} \varphi_{k,m}(x))d\mu .$$

Так как для $x \in B_{k,m}$ имеем $\varphi_{k,m} = 1$, то получаем: $\mu(U_{k,m} \cap B_{k,m}) = 0$.

Определяем: $\widehat{E}_x = E_x \setminus \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n(m)} \left(U_{k,m} \cap B_{k,m} \right) \right) \right)$.

Так как для любой инвариантной меры $\mu(E_x \setminus \widehat{E}_x) = 0$, то $\widehat{E}_x$ имеет максимальную вероятность и $\mu(\widehat{E}_x) = \mu(E_x) = 1$.

Покажем, что всякая точка плотности $y \in E_x$ входит в множество $\widehat{E}_x$.

Пусть $B_{k,m}$ – любой из шаров, заключающих y; найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B(y,\varepsilon) \subseteq B_{k,m}$. По определению точки плотности имеем:

$$0 < \mu_x(B(y,\varepsilon)) = \int\limits_M \chi(B(y,\varepsilon))d\mu_x < \int\limits_{E_x} \varphi_{k,m} d\mu_x =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \varphi_{k,m}(F(t,y))dt = \Phi_{k,m}(y),$$

($\chi(V)$ - характеристическая функция множества *V*) т.е., если точка плотности $y \in B_{k,m}$, то $y \notin U_{k,m}$, следовательно,

$$y \in E_x \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n(m)} \left(U_{k,m} \cap B_{k,m} \right) \right) \right) = \widehat{E}_x .$$

Покажем далее, что, если *y* не является точкой плотности, то $y \notin \widehat{E}_x$.
По предположению, существует такое $\varepsilon > 0$, что $\mu_x(B(y,\varepsilon)) = 0$.
Для этого ε определяем *m* из условия $1/m < \varepsilon/4$. По построению найдётся точка $x_k^{(m)}$ такая, что $d(x_k^{(m)}, y) < 1/m$. Тогда

$$y \in B(x_k^{(m)}, 1/m) \subset B(x_k^{(m)}, 2/m) \subset B(y,\varepsilon).$$

Имеем:
$$0 = \mu_x(B(y,\varepsilon)) = \int_M \chi(B(y,\varepsilon)) d\mu_x \geq \int_{E_x} \varphi_{k,m}(y) d\mu_x =$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi_{k,m}(F(t,y)) dt = \Phi_{k,m}(y).$$

Таким образом, $\Phi_{k,m}(y) = 0$, т.е. $y \in U_{k,m}$. Так как $y \in B_{k,m}$, то $y \in U_{k,m} \cap B_{k,m}$ т.е. $y \notin \widehat{E}_x$.

Таким образом, исходя из индивидуальной меры точки *x* построено множество $\widehat{E}_x$, обладающее следующими свойствами:

1) множество $\widehat{E}_x$ инвариантно, т.е. для любого бэровского множества $A \subseteq \widehat{E}_x$ $\mu_x(F(t,A)) = \mu_x(A)$;

2) каждая точка $y \in \widehat{E}_x$ является точкой плотности для любой инвариантной меры μ такой, что $\mu(\widehat{E}_x) \neq 0$;

3) Для любой точки $y \in \widehat{E}_x$ и для любого бэровского множества $A \subseteq \widehat{E}_x$ $\mu_y(A) = \mu_x(A)$; для любой инвариантной меры μ ($\mu(\widehat{E}_x) = 1$) из соотношения: $\mu(A) = \int_{\widehat{E}_x} \mu_y(A) d\mu$ следует $\mu(A) = \mu_x(A) \int_{\widehat{E}_x} d\mu = \mu_x(A)$. Таким образом, на $\widehat{E}_x$ может быть определена лишь одна-единственная инвариантная мера μ_x. Отсюда и вытекает строгая эргодичность ограничения потока *F*(*t*,*x*) на $\widehat{E}_x$;

4) **Теорема 2**. Множество $\widehat{E}_x$ нельзя разложить на две части *A* и *B* ($A \cap B = \varnothing$) такие, что $\mu(A) \cdot \mu(B) > 0$ для какой-либо инвариантной меры μ на *M*.

Доказательство. Действительно, допустим, что на $\widehat{E}_x$ может быть разбито на две части, удовлетворяющие соответствующим требованиям, в противоположность тому, что утверждает теорема 2.
Определим теперь меру ν условием

$$\nu(C) = \begin{cases} \dfrac{\mu(C)}{\mu(A)}, & C \subseteq A, \\ 0, & C \subseteq B. \end{cases}$$

Тогда мера ν окажется, как нетрудно видеть, инвариантной на $\widehat{E}_x$, что противоречит однозначной определенности меры μ_x. Теорема доказана.

Определение 6. Точки $x \in E_T \cap E_D = E_R$ называются ***регулярными***; это те точки, которые являются одновременно транзитивными и точками плотности. Множество E_R регулярных точек инвариантно, и для любой инвариантной нормированной меры μ мера множества мера множества $\mu(E_R) = 1$.

Теорема 3. Множество $\overline{E_R}$ (замыкание множества регулярных точек) является минимальным центром притяжения для систем $F\,(t,x)$.
Доказательство . Обозначим через $\chi(x) = \chi_{B(E_R,\varepsilon)}(x)$ характеристическую функцию ε- окрестности $B(E_R,\varepsilon)$ множества E_R. По определению центра Хильми для любого $\varepsilon > 0$ и любой $x \in M$, мы должны иметь:

$$\mathrm{P}(F(t,x) \in B(E_R,\varepsilon)) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \chi(F(s,x))ds = 1 \qquad (*)$$

Для регулярных точек равенство (*) очевидно. Допустим теперь, что найдётся нерегулярная точка x_0 и число $\gamma (0 < \gamma \le 1)$ такие, что равенство (*) не выполняется, т.е. $\mathrm{P}(F(t,x_0) \in B(E_R,\varepsilon)) = 1 - \gamma$.
Значит, найдётся последовательность чисел $\{\tau_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ такая, что

$$\lim_{\tau\to\infty} \left(\frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} \chi(F(s,x_0))ds \right) = 1 - \gamma$$

Из последовательности непрерывных функционалов

$$\mu_n(f) = \left(\frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} f(F(s,x_0))ds \right), \text{ где } f \in C(M)$$

выбираем слабо* сходящуюся к инвариантной нормированной мере μ'. под-последовательность и, соответственно, подпоследовательность $\{\tau'_n\} \subset \{\tau_n\}$.
При этом $\mu'(E_R) = 1$, $\mu'(M \setminus E_R) = 0$.
Строим непрерывную функцию $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{E_R}; \\ 1 - (1/\varepsilon) d(x, \overline{E_R}), & 0 \le d(x, \overline{E_R}) \le \varepsilon; \\ 0, & d(x, \overline{E_R}) \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Для меры μ' справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\tau'_n} \displaystyle\int_0^{\tau'_n} f(F(s, x_0)) ds \right) = \mu'(f)$

Ввиду выбора функции $f(x)$ имеем для правой части последнего равенства:

$$\int_M f(x) d\mu' \ge \int_M \chi_{E_R}(x) d\mu' = \mu'(E_R) = 1,$$

и для левой части

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\tau'_n} \int_0^{\tau'_n} f(F(s, x_0)) ds \right) \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\tau'_n} \int_0^{\tau'_n} \chi(F(s, x_0)) ds \right) \le 1 - \gamma$$

Полученное противоречие показывает что E_R есть центр притяжения.
Покажем, что это минимальный центр притяжения. Допустим, что существует центр притяжения $\tilde{E}$, составляющий истинную часть множества E_R. Так как $\tilde{E}$ по предположению множество замкнутое, то найдётся точка $x \in E_R$ $d(x, \tilde{E}_R) = \alpha > 0$; тогда $B(x, \alpha/2) \cap B(\tilde{E}_R, \alpha/2) = \varnothing$. Так как x есть точка плотности, то $\mu_x(B(x, \alpha/2)) > 0$; следовательно, $\mu_x(B(\tilde{E}, \alpha/2)) < \mu_x(M) = 1$. Отсюда $\underline{\mathrm{P}}(F(t, x) \in B(\tilde{E}_R, \alpha/2)) < 1$, т.е. $\tilde{E}$ не есть центр притяжения. Теорема доказана.
Всё значение индивидуальных мер μ_x выясняется следующей теоремой.

Теорема 4. Всякая нормированная инвариантная транзитивная мера μ. совпадает с индивидуальной мерой μ_x, где x - любая точка некоторого инвариантного множества $\aleph_x$.

Доказательство. Выделяем из M множество U точек таких, что для $x \in U$ имеем $\mu(B(x,\varepsilon)) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Легко показать, что U - замкнутое инвариантное множество и, что $\mu(M \setminus U) = 0$, т.е. $\mu(U) = 1$.

Ввиду транзитивности меры μ существует множество $\aleph_x \subset U$, $\mu(\aleph_x) = 1$ такое, что для любой точки $x \in \aleph_x$ при любой непрерывной функции $f(x)$ временное среднее имеет постоянное значение, т.е.

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(F(s,x))ds = \int_M f(x)d\mu = \int_{\aleph_x} f(x)d\mu .$$

Сравнивая этот результат с определением индивидуальной меры μ_x, мы видим, что $\mu = \mu_x$, где $x \in \aleph_x$. Теорема доказана.

Следствие 1. Множество $\aleph_x$ состоит из регулярных точек, т.е. $\aleph_x \subseteq E_R$. Действительно, при построении множества $\aleph_x$ мы отобрали все точки, где существует временное среднее, т.е. $\aleph_x \subset E$; далее, мы отбирали «точки плотности» относительно μ, т.е. относительно меры μ_x, значит, $\aleph_x \subseteq E_D$. Наконец, $\aleph_x \subset E_T$. В самом деле, если $y \in \aleph_x$, то $\mu_y(f) = \mu_x(f)$, множество же точек $y \in E \setminus \aleph_x$ имеет μ_x - меру нуль. Следовательно, $\aleph_x \subseteq E_T \cap E_D = E_R$.

Следствие 2. Множество регулярных точек E_R разбивается на систему множеств $\{\aleph_\alpha\}$ без общих точек, каждое из которых объединяет точки с тождественными индивидуальными мерами. Эту общую для $x \in \aleph_\alpha$ индивидуальную меру обозначим через μ_α, а каждое из множеств $\aleph_\alpha$ назовём ***эргодическим*** или ***эргодической компонентой*** меры μ. Множество всех мер, соответствующих эргодическим множествам, называют ***фундаментальной системой мер*** и обозначают Σ_μ.

Связь любой инвариантной меры μ с фундаментальной системой инвариантных мер нами уже получена и она описывается формулой:

$$\mu(A) = \int_E \mu_x(A)d\mu ,$$

где A – любое $\wp$ - измеримое множество.

Заметим, что всякая линейная комбинация фундаментальных мер вида:

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_{\alpha_i} \qquad \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1,\ \ \beta_i > 0 \right), (**)$$

является инвариантной нормированной мерой. Далее, из характеристического свойства инвариантной меры μ ($f \in C(M)$):

$$\int_M f(F(t,x))d\mu = \int_M f(x)d\mu$$

следует, что всякая предельная мера для последовательностей (**) также есть инвариантная мера.

Укажем общую форму всех инвариантных мер. Пусть m - любая (вообще говоря не инвариантная) мера, нормированная на множестве E квазирегулярных точек: m (E) = m(M) = 1. Тогда любая инвариантная нормированная мера имеет выражение $\mu(A) = \int_E \mu_x(A)dm$.

В самом деле, очевидно, $\mu(M) = 1$. Далее, μ - инвариантна.

Действительно, $\mu(F(t,A)) = \int_E \mu_x(F(t,A))dm = \int_E \mu_x(A)dm = \mu(A)$

в силу инвариантности меры μ_x. Наконец, любая инвариантная мера $\mu(A)$ по формуле выражается интегралом $\mu(A) = \int_E \mu_x(A)d\mu$.

Согласно теореме Крейна – Мильмана всякая мера m является предельной (в смысле слабой* сходимости) для последовательности мер: $m_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i m(x_i)$ где

$\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$, $\beta_i > 0$, $m(x_i)(f) = f(x_i)$, $x_i \in M$, i=1,…,k.

Отсюда следует, что мера μ является (слабо*) предельной для мер

$$\mu_k(A) = \int_E \mu_x(A)dm_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \int_E \mu_x(A)dm(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_{x_i}(A)$$

т.е. любая инвариантная нормированная мера является пределом мер типа(**).

Таким образом, инвариантные меры образуют бикомпактное выпуклое множество в $C'(M)$, крайними точками которого являются эргодические меры.

Пример. Рассмотрим систему типа расширения, где в качестве бикомпактного пространства M выбрана поверхность тора

$T^2 = \{0 \le \varphi_1 < 1, 0 \le \varphi_2 < 1, (\varphi_1 + k, \varphi_2 + k') \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$, если k и k' целые},

Определим движения на торе уравнениями ($F(t,(\varphi_1,\varphi_2))$)

$$\dot{\varphi}_1 = \psi(\varphi_1,\varphi_2) \cdot \psi(\varphi_1 - 1/2, \varphi_2 - 1/2),$$

$$\dot{\varphi}_2 = \alpha \cdot \psi(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \psi(\varphi_1 - 1/2, \varphi_2 - 1/2),$$

где $\psi(\varphi_1, \varphi_2)$ - непрерывная функция на торе (периодическая по аргументам φ_1, φ_2 с периодом 1), всюду положительная, кроме точки (0, 0), где $\psi(0,0) = 0$, и удовлетворяющая условиям Липшица. Дополнительно предположим, что $\iint\limits_{T^2} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2}{\psi(\varphi_1, \varphi_2)} = +\infty$, например $\psi(\varphi_1, \varphi_2) = \sin^2 \pi\varphi_1 + \sin^2 \pi\varphi_2$.

В качестве расширенного пространства выберем $T^2 \times R$ в котором динамическую систему $H(t, (\varphi_1, \varphi_2, x))$ определим уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \psi(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \psi(\varphi_1 - 1/2, \varphi_2 - 1/2),$$
$$\dot{\varphi}_2 = \alpha \cdot \psi(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \psi(\varphi_1 - 1/2, \varphi_2 - 1/2),$$
$$\dot{x} = \gamma(\varphi_1, \varphi_2) x,$$

где $\gamma(\varphi_1, \varphi_2) \in C^\infty(T^2)$, 1- периодическая функция от своих аргументов и $\gamma(0,0) = -1$, $\gamma(1/2, 1/2) = 1$. Выписанная система имеет решение вида

$$\left(F(t, (\varphi_1, \varphi_2)), x \exp(\int\limits_0^t \gamma(F(s, (\varphi_1, \varphi_2)) ds \right).$$

Минимальный центр притяжения динамической системы $F(t, (\varphi_1, \varphi_2))$ состоит из двух точек (0,0) и (1/2,1/2) и $E_R = (0,0) \cup (1/2, 1/2)$. Фундаментальная система мер содержит лишь две инвариантные меры, определяемые равенствами: $\mu_1(f(\varphi_1, \varphi_2)) = f(0,0)$ и $\mu_2(f(\varphi_1, \varphi_2)) = f(1/2, 1/2)$, где $f(\varphi_1, \varphi_2) \in C\left(T^2\right)$. Таким образом, $\mu_1(\gamma(\varphi_1, \varphi_2)) = -1$ а $\mu_2(\gamma(\varphi_1, \varphi_2)) = 1$.

Полутраектории потока $F(t, (\varphi_1, \varphi_2))$, не входящие в точки (0,0) и (1/2,1/2) совпадают с иррациональной обмоткой тора. Для полутраектории $F_1(I_+, (\varphi_1, \varphi_2))$, входящей в (0,0), $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \gamma(F_1(s, (\varphi_1, \varphi_2)) ds = -1$, а для полутраектории $F_2(I_+, (\varphi_1, \varphi_2))$, входящей в (1/2,1/2), $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \gamma(F_2(s, (\varphi_1, \varphi_2)) ds = 1$. Рассмотрим произвольную инвариантную меру $\mu = \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2$ ($\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_1 + \beta_2 = 1$), тогда в силу теоремы Биркгофа- Хинчина для почти вех точек $(\varphi_1, \varphi_2) \in T^2$ существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \gamma(F_2(s,(\varphi_1,\varphi_2))ds = \beta_1\int_{T^2}\gamma(\varphi_1,\varphi_2)d\mu_1 + \beta_2\int_{T^2}\gamma(\varphi_1,\varphi_2)d\mu_2 = -\beta_1+\beta_2 .$$

Таким образом, для любого $\chi = -\beta_1 + \beta_2$, где $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$, найдется траектория, лежащая всюду плотно на торе, для которой $\exp(\int_0^t \gamma(F(s,(\varphi_1,\varphi_2))ds \approx \exp\chi t$ при $t \to +\infty$. Для любого χ, указанного вида траектории динамической системы $F(t,(\varphi_1,\varphi_2))$ лежат всюду плотно на T^2, а решения линейного уравнения $x\exp(\int_0^t \gamma(F(s,(\varphi_1,\varphi_2))ds \to \infty$ при $\chi > 0$, и $x\exp(\int_0^t \gamma(F(s,(\varphi_1,\varphi_2))ds \to 0$ при $\chi < 0$. Построенный пример не меняется при малом изменении функции $\gamma(\varphi_1,\varphi_2)$. Однако, ситуация изменяется при малом возмущении потока $F(t,(\varphi_1,\varphi_2))$. Так, рассматривая динамическую систему $F(t,(\varphi_1,\varphi_2),\varepsilon)$, порожденную системой уравнений вида

$$\dot{\varphi}_1 = \psi(\varphi_1,\varphi_2)\cdot\psi(\varphi_1 - 1/2, \varphi_2 - 1/2) + \varepsilon\phi(\varphi_1,\varphi_2),$$

$$\dot{\varphi}_2 = \alpha\cdot(\psi(\varphi_1,\varphi_2)\cdot\psi(\varphi_1 - 1/2, \varphi_2 - 1/2) + \varepsilon\phi(\varphi_1,\varphi_2)),$$

где $\varepsilon > 0$, $\phi(\varphi_1,\varphi_2) > 0$ - 1-периодическая своих аргументов, траектории потока $F(t,(\varphi_1,\varphi_2),\varepsilon)$ рекуррентны и центром Хильми является вся поверхность тора, но не почти периодичны, ибо вероятность нахождения траектории в окрестности точек (0,0) и (1/2,1/2) определяется лишь свойствами функции $\phi(\varphi_1,\varphi_2) > 0$. Приведенный пример показывает, как плохо может обстоять дело с непрерывной зависимостью от параметра на бесконечном временном интервале даже для одного неавтономного линейного уравнения $\dot{x} = \gamma(t,a)x$, где $\gamma(t,a)$ - бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов, однако, малое возмущение параметра приводит к существенному изменению поведения решений. Разобраться в этом эффекте, не прибегая к понятию расширения весьма сложно.

ГЛАВА 8

СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. Определения. Подход Смейла

Дифференциальная динамика, развитие которой обеспечивалось усилиями Смейла, Пейксото, Хартмана и многих других математиков, исторически является качественной теорией дифференциальных уравнений; ее возникновение связано с именами Пуанкаре и Биркгофа и относится к началу прошлого века. Выражаясь несколько неопределенно, можно сказать, что основная цель этой науки - выяснение глобальной «топологической» картины поведения решений дифференциальных уравнений на многообразиях.

С глобальной точки зрения такие дифференциальные уравнения задаются сечениями касательного расслоения или векторными полями на многообразии и порождают некоторый поток на многообразии.

Хотя исторически главным объектом исследования в этой области были именно потоки, в последнее время появилась тенденция обращать основное внимание на диффеоморфизмы. Чтобы пояснить связь между этими двумя объектами, мы рассмотрим возможность установления соответствия между потоками и диффеоморфизмами.

Самый простой способ перейти от потока к диффеоморфизму - рассмотреть отображение $F(t,x)$ для некоторого фиксированного t. Если векторное поле X дифференцируемо, то, в силу теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения, отображение $F(t,x)$ является диффеоморфизмом многообразия M на себя. Итерации отображения $F(t,x)$

$$F^n(t,x) = \underbrace{F(t, F(t,..., F(t,x)...)}_{n} = F(nt,x)$$

образуют действие группы целых чисел Z на M. Это действие является как бы «набором образцов» действия потока $F(t,x)$ через последовательные дискретные промежутки времени продолжительности $|t|$. Различные динамические свойства потока $F(t,x)$ (рекуррентные точки, неподвижные точки, асимптотическое поведение траекторий) отражаются в соответствующих свойствах группы диффеоморфизмов $\{F(nt,x)\}_{n\in Z}$.

Можно поставить обратный вопрос: При каких условиях данный диффеоморфизм $f:M\to M$ можно включить в поток, т.е. найти поток $F(t,x)$, для которого $F(1,x)=f$?

Это не всегда возможно. Понятно, что диффеоморфизм, меняющий ориентацию и, вообще, не гомотопный тождественному, не может быть включен в поток. Кроме указанной, есть и иные препятствия для включения диффеоморфизма в поток.

Рассмотрим, введенное Пуанкаре понятие секущей. Пусть задано векторное поле X на многообразии M. ***Секущей*** для X называется замкнутое подмногообразие $\Sigma\subset M$ коразмерности 1 (т.е. размерности $\dim M$- 1) такое, что

(1) Σ трансверсально X (т.е. касательное расслоение $T\Sigma$ и векторное поле $X|_\Sigma$ порождают расслоение $TM|_\Sigma$);

(2) каждая траектория, покидающая Σ, пересекает Σ в прошлом и в будущем (т.е. при $x\in\Sigma$ найдутся такие $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$, что $F(t_1,x)\in\Sigma$ и $F(t_2,x)\in\Sigma$);

(3) каждая траектория пересекает Σ.

Таким образом, если Σ - секущая для X, то можно определить ***отображение последования*** $f:\Sigma\to\Sigma$, положив $f(x)=F(t_0(x),x)$, где $t_0(x)$ - наименьшее из положительных чисел t_0, для которых $F(t_0,x)\in\Sigma$. Заметим, что в силу гладкой зависимости решений системы дифференциальных уравнений от параметров, так определенное отображение f оказывается диффеоморфизмом Σ, и что в силу условия (1) $t_0(x) > 0$.

Таким образом, при помощи секущей поток порождает диффеоморфизм подмногообразия. Однако не каждый поток допускает секущую. Например, из условия (1) следует, что векторное поле X не имеет особых точек; соображения, связанные с индексом Пуанкаре, показывают, что это условие налагает ограничения даже на топологический тип многообразия M.

Однако, всякий диффеоморфизм можно рассматривать как отображение последования для некоторого потока с помощью конструкции ***надстройки.***

Пусть задан диффеоморфизм $f:M\to M$. Построим новое многообразие $\tilde{M}$, отождествив в прямом произведении $M\times[0,1]$ пары точек $(x, 1)$ и $(f(x), 0)$.

Единичное векторное поле на $M\times[0,1]$, направленное вдоль $[0,1]$, при этом отождествлении переходит в гладкое векторное поле X на $\tilde{M}$, а нулевое сечение $M_0=M\times\{0\}$ превращается в секущую этого векторного поля X, на которой отображение последования совпадает с f.

В случае $M = S^1$ многообразие $\tilde{M}$ в этой конструкции оказывается либо тором, либо бутылкой Клейна, в зависимости от того, сохраняет или меняет ориентацию отображение *f*. В частности, поворот окружности на угол θ порождает векторное поле X_0 вида $X_0 = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial y}$ ($\theta \neq \pm\pi/2$). Аналогичная конструкция используется и в эргодической теории под названием специальное представление потока.

Детально рассмотрев в главе 6 свойства потока, мы из соображений удобства будем пользоваться как тем, так и другим понятием.

Введем в пространстве отображений локальную топологию. Пусть *U* - открытое подмножество некоторого банахова пространства *X*, а *V* - открытое подмножество банахова пространства *Y*.

Определение 1. Символом C^0 (*U*, *V*) обозначается множество всех непрерывных отображений подмножества *U* в *V*.

Топология в пространстве C^0 (*U*, *V*) задается системой шаров. А именно, определим ε - шар с центром $f \in C^0(U,V)$, полагая

$$B^0(f,\varepsilon) = \{g \in C^0(U,V) : (\forall x \in U) \| f(x) - g(x) \| < \varepsilon\}$$

Множество ε - шаров для всех $\varepsilon > 0$ и всех $f \in C^0(U,V)$ образует базу открытых множеств равномерной или C^0 - топологии, которая есть не что иное, как топология равномерной сходимости на *U*.

Чтобы ввести C^r-топологии при $r > 0$, нам придется напомнить некоторые определения из анализа.

Определение 2. Отображение $f : U \to V$ (где *U* -открытое подмножество *X*) называется ***дифференцируемым*** в точке $x \in U$, если существует ограниченный линейный оператор $Df_x : X \to Y$ такой, что

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df_x(h) \|_Y}{\|h\|_X} = 0 .$$

Если отображение *f* дифференцируемо во всех точках множества *U*, то определено отображение $Df : U \to L(X,Y)$, где *L* (*X*, *Y*) - банахово пространство (ограниченных) линейных отображений пространства *X* в пространство *Y*. Если отображение *Df* непрерывно, то говорят, что отображение *f* *непрерывно дифференцируемо*, или принадлежит классу C^1 (для краткости *f* иногда называют C^1-отображением). В свою очередь *Df* отображает *U* в банахово пространство L (X, Y); если это отображение дифференцируемо, то определено отображение $D^2 f: U \to L(X, L(X,Y))$.

Но пространство L (X, L (X, Y)) можно отождествить с пространством (ограниченных) билинейных отображений $X \times X \to Y$, и так как высшие дифференциалы, рассматриваемые как полилинейные отображения, симметричны, то можно записать $D^2 f: U \to L_s^2(X,Y)$, где $L_s^2(X,Y)$ - пространство непрерывных симметричных билинейных отображений $X \times X \to Y$.

Повторяя эту процедуру, можно получать высшие дифференциалы

$$D^r f: U \to L_s^r(X,Y),$$

где $L_s^r(X,Y)$ - пространство непрерывных симметричных r-линейных отображений $X^r \to Y$. Будем говорить, что ***f* - *отображение класса*** C^r, или, короче, C^r - ***отображение***, если $D^r f$ существует и является непрерывным отображением.

Теперь мы можем локально определить C^r-топологию.

Определение 3. Пусть $C^r(U, V)$ — множество всех C^r-отображений U в V. Наделим его топологией, определив (C^r, ε) - шар с центром $f \in C^r(U,V)$ следующим образом:

$$B^r(f,\varepsilon) = \{g \in C^r(U,V) : (\forall k \le r), (\forall x \in U) \left\| D^k f(x) - D^k g(x) \right\| < \varepsilon\}.$$

Множество (C^r, ε) - шаров для всех $\varepsilon > 0$ и всех C^r - отображений f образует базу открытых множеств топологии пространства $C^r(U, V)$, которая называется C^r - ***топологией***.

Если Y - полное пространство, то $C^r(X, Y)$ - тоже полное пространство. Действительно, предел в C^r - топологии последовательности C^r - отображений сам является C^r - отображением. Таким образом, в этом частном случае определенная нами C^r - топология совместима со структурой банахова пространства.

Итак, мы определили топологии в пространствах отображений подмножеств банаховых пространств друг в друга; дадим теперь глобальные варианты этих локальных определений. Пусть E и F - заданные многообразия, моделями которых соответственно служат банаховы пространства X и Y.

Пусть U и V - некоторые координатные окрестности соответственно на многообразиях E и F и $f: E \to F$ некоторое C^r - отображение, причем $\overline{f(U)} \subset V$. Пусть $\tilde{f}: U \to V$ - ограничение $f|U$. Далее, пусть $B^r((U,V,f),\varepsilon)$ - множество

C^r - отображений $g: E \to F$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\overline{g(U)} \subset V$;

2) $\tilde{g} \in B^r(f, \varepsilon) \subset C^r(U, V)$.

Другими словами, (C^r, ε) - шар с центром *f* (относительно координатных окрестностей *U* и *V*) - это множество всех C^r - отображений, переводящих *U* внутрь *V* и таких, что дифференциалы до *r*-го порядка их локальных представлений лежат в ε - окрестностях соответствующих дифференциалов отображения *f*. Как и в локальном случае, эти шары (для всех $\varepsilon > 0$, всех пар координатных окрестностей *U* и *V* и всех C^r - отображений *f*) образуют базу открытых множеств C^r - топологии в пространстве $C^r(E,F)$.

Заметим, что в силу очевидного вложения $C^{r+1}(E,F) \subset C^r(E,F)$ в пространстве $C^{r+1}(E,F)$ возникают две топологии: C^{r+1} - топология и относительная C^r -топология, причем вторая из них слабее первой, так что подмножества $C^{r+1}(E,F)$, открытые в C^r - топологии, являются открытыми в C^{r+1} -топологии. Далее, $C^{r+1}(E,F)$ - всюду плотное подмножество $C^r(E,F)$ в C^r - топологии, так что любое всюду плотное в C^{r+1} - топологии подмножество $C^{r+1}(E,F)$, будет всюду плотным подмножеством $C^r(E,F)$ в C^r - топологии. Наконец, множество $\mathrm{Diff}^r(M)$ открыто в $C^r(M, M)$ так как $Df: U \to L(X, Y)$ обратим. Приведенная конструкция позволяет применять к пространствам отображений топологическую технику.

После того, как в пространствах отображений определена топология, можно приступить к описанию предложенного Смейлом подхода к изучению структуры траекторий диффеоморфизмов.

С классической точки зрения, основной задачей качественной теории дифференциальных уравнений является классификация решений всех дифференциальных уравнений по некоторым «качественным» (обычно это означает топологическим) признакам. Другими словами, желательно ввести некоторые топологические или алгебраические инварианты векторного поля, которые определяли бы «качественную» картину поведения, соответствующего этому векторному полю, потока.

Примерами такого рода инвариантов служит индекс Пуанкаре (п.6.5) особой точки векторного поля (и его связь с эйлеровой характеристикой многообразия, на котором задано векторное поле). Однако такого рода характеристики, как правило, оказываются очень грубыми - например, индекс Пуанкаре не определяет однозначно даже числа неподвижных точек.

С другой стороны, возможно, что если выбросить из рассмотрения некоторые «нетипичные» потоки, то задача классификации уже не будет безнадежной. Естественным первым шагом при попытке изучения всей совокупности потоков служит изучение свойств, присущих «большинству» потоков.

Определение 4. (1) ***Массивным*** (или бэровским) ***подмножеством*** топологического пространства называется подмножество, которое можно представить в виде счётного пересечения открытых всюду плотных множеств (множество второй категории).

(2) Свойство (отображений M в N) называется C^r - ***типичным***, если оно выполняется для всех элементов некоторого массивного подмножества в пространстве $C^r(M, N)$. Свойство диффеоморфизмов на многообразии M называется C^r - *типичным*, если оно выполняется для элементов некоторого массивного подмножества в пространстве Diff(M).

Понятие типичного свойства весьма полезно. Это станет ясно, если мы заметим, что многообразие, моделью которого служит полное метрическое пространство, удовлетворяет теореме Бэра (п.0.2.3). В частности, пространство Diff(M), будучи открытым подмножеством в $C^r(M, M)$, является банаховым многообразием и, следовательно,удовлетворяет теореме Бэра.

После того, как определено понятие «большинство», мы хотим выяснить, что следует понимать под «классификацией». На сцене появляются две новые идеи. Прежде всего, надо определить некоторое качественное отношение «эквивалентности» двух диффеоморфизмов с точки зрения их траекторной структуры и описать классы эквивалентности на массивном множестве в пространстве диффеоморфизмов. При этом каждый класс эквивалентности должен включать достаточно обширное множество диффеоморфизмов, чтобы множество классов эквивалентности было обозримым. Например, можно было бы надеяться, что рассматриваемые классы эквивалентности окажутся открытыми подмножествами пространства Diff(M) или, по крайней мере, открытыми подмножествами того массивного множества, диффеоморфизмы которого мы пытаемся классифицировать.

В качестве отношения эквивалентности будем рассматривать понятие топологической эквивалентности, с которым мы уже встречались, рассматривая линейные векторные поля в конечномерном пространстве.

Определение 5. Диффеоморфизмы f, $g \in \mathrm{Diff}^r(M)$ называются ***топологически сопряженными*** (***топологически эквивалентными***), если существует такой гомеоморфизм $h: M \to M$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow[g]{} & M \end{array}$$

коммутативна, т.е. имеет место соотношение $g \circ h = h \circ f$ или $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Топологическую сопряженность диффеоморфизмов *f, g* мы будем обозначать так: $f \sim g$. Легко проверить, что топологическая сопряженность действительно является отношением эквивалентности. Требование, чтобы отображение *h* было не только гомеоморфизмом, а диффеоморфизмом, приводит к слишком сильному отношению эквивалентности, для которого множество классов эквивалентности оказывается заведомо необозримым.

Отметим, что неподвижные, периодические точки, в конечномерном случае размерность инвариантных многообразий (теорема Брауэра об инвариантности топологической размерности), рекуррентные движения , неблуждающие и блуждающие точки являются инвариантами топологической сопряженности.

Второе требования к схеме классификации диффеоморфизмов приводит к понятию устойчивости, предложенному Андроновым и Понтрягиным .

Определение 6. Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ называется ***структурно устойчивым*** (***грубым***), если найдется такая его окрестность U в пространстве $\mathrm{Diff}^r(M)$, что любой диффеоморфизм $g \in U$ топологически сопряжен диффеоморфизму *f*.

Заметим, что структурно устойчивые диффеоморфизмы автоматически образуют открытое множество в пространстве $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Часто используют еще одно отношение эквивалентности (и соответствующее понятие устойчивости), более слабое, чем топологическая сопряженность, которое, однако, сохраняет все упомянутые выше инварианты топологической сопряженности.

Определение 7. Диффеоморфизмы f, $g \in \mathrm{Diff}^r(M)$ называются

Ω ***-сопряженными***, если их ограничения на множества неблуждающих точек Ω топологически сопряжены, т.е. если существует такой гомеоморфизм $h:\Omega(f)\to\Omega(g)$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f|_\Omega} & M \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow[g|_\Omega]{} & M \end{array}$$

коммутативна. В этом случае пишут $f \underset{\Omega}{\sim} g$. Заметим, что при $f \underset{\Omega}{\sim} g$ множества неподвижных, периодических и рекуррентных точек диффеоморфизма f переходят при отображении h в соответствующие множества для диффеоморфизма g.

Определим теперь понятие устойчивости, соответствующее отношению Ω-сопряженности.

Определение 8. Диффеоморфизм $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ называется Ω- ***устойчивым*** (в классе C^r), если найдется такая его окрестность U в пространстве Diff (M), что из $g\in U$ следует $f \underset{\Omega}{\sim} g$.

Теперь можно охарактеризовать идею «типичности» и основанный на ней подход Смейла. В общих чертах это предполагает рассмотрение следующих вопросов:

1) Найти типичные свойства диффеоморфизмов на данном (компактном) многообразии M.

2) При заданном M классифицировать некоторое массивное множество в пространстве Diff(M), желательно состоящее из классов топологической (или Ω) сопряженности, с помощью более «обозримого» множества. Другими словами, указать способ нахождения типичного представителя в каждом классе эквивалентности. С практической точки зрения желательно, чтобы элементы каждого класса были устойчивыми в каком-либо подходящем смысле.

§ 2. Гладкие динамические системы на торе

8.2.1. Гомеоморфизмы окружности

В этом параграфе изучим динамические системы в одномерном случае, т.е. когда фазовое пространство M есть единичная окружность S^1. В дальнейшем S^1 часто будет отождествляться с полуинтервалом $0\le x<1$, где x - циклическая координата на S^1.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм F окружности S^1. Всякий такой гомеоморфизм можно, очевидно, задать в виде $F(x) = f(x) (\mathrm{mod}\ 1)$, где $f(x)$ - непрерывная монотонно возрастающая функция, определенная для всех $x \in R$ и удовлетворяющая условию $f(x + 1) = f(x) + 1$.

Мы будем говорить, что функция $f(x)$ представляет гомеоморфизм F. Если F - диффеоморфизм, то функция $f(x)$ гладкая. Мы будем говорить, что F - диффеоморфизм класса C^r, если $f \in C^r(S^1)$. Ясно, что если f_1, f_2 представляют один и тот же гомеоморфизм, то $f_1(x) = f_2(x) + k$ при всех $x \in R$, k - целое число.

Если функция $f(x)$ представляет гомеоморфизм F, то F^n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) представляется функцией $f^{(n)}$, определенной рекуррентным соотношением

$F^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$, $f^{(0)}(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$.

Все функции $f^{(n)}(x)$ обладают теми же свойствами, что и $f(x)$, т.е. непрерывны, монотонны и удовлетворяют соотношению $f(x + 1) = f(x) + 1$.

Теорема 1. Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма F окружности S^1 и любой функции $f(x)$, представляющей F, предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} = \alpha$$

существует и не зависит от выбора точки $x \in R$. Число α рационально тогда и только тогда, когда некоторая ненулевая степень гомеоморфизма F имеет неподвижную точку.

Доказательство. В силу $f_1(x) = f_2(x) + k$ мы можем, очевидно, рассматривать лишь одну функцию $f(x)$, представляющую F: так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_1^{(n)}(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_2^{(n)}(x)}{n} + k$$

1)Докажем сначала, что если предел существует для одной точки x_0, то он существует для всех $x \in R$ и не зависит от x. Пусть предел существует для точки x_0, и возьмем любую точку $x \in R$. Выберем такое целое число m, что $f^{(n)}(x_0 + m) \le f^{(n)}(x) < f^{(n)}(x_0 + m + 1)$, $x_0 + m \le x < x_0 + m + 1$. В силу монотонности функций $f^{(n)}(x)$, при любом n имеем

$f^{(n)}(x_0 + m) \le f^{(n)}(x) < f^{(n)}(x_0 + m + 1)$ или, в силу равенства $f(x + 1) = f(x) + 1$, имеем $f^{(n)}(x_0) + m \le f^{(n)}(x) < f^{(n)}(x_0) + m + 1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n} = 0,$$

и утверждение 1) доказано.

2) Докажем теперь существование предела для некоторой точки x_0.

2. а) Рассмотрим сначала случай, когда какая-нибудь степень гомеоморфизма F, скажем F^k, $k \neq 0$, имеет неподвижную точку: $F^k x_0 = x_0$. Так как x_0 - неподвижная точка и для F^{-k}, то мы можем считать, что $k > 0$. Ясно, что $f^{(k)}(x_0) = x_0 + r$, r - целое число. Отсюда при любом $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $f^{(lk)}(x_0) = x_0 + lr$. Любое целое n запишем в виде $n = lk + s$, $0 \le s < k$. Тогда $f^{(n)}(x_0) = f^{(lk+s)}(x_0) = f^{(s)}(f^{(lk)}(x_0)) = f^{(s)}(x_0 + lr) = f^{(s)}(x_0) + lr$,откуда $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n} = \dfrac{f^{(s)}(x_0)}{n} + \dfrac{lr}{lr+s} \to \dfrac{r}{k}$ при $n \to \infty$, т.е. в рассмотренном случае предел существует и рационален.

2.б) Пусть теперь никакая степень F не имеет неподвижных точек. Зафиксируем произвольное натуральное k. Разность $f^{(k)}(x) - x$ в этом случае не может принимать целых значений, и, следовательно, для всех $x \in R$

$$x + r < f^k(x) < x + r + 1$$

при некотором целом r.

Возьмем натуральное число n и применим последнее неравенство к точкам $x_0 = 0, f^{(k)}(0), f^{(2k)}(0), \ldots, f^{((n-1)k)}(0)$:

$$f^{(lk)}(0) + r < f^{((l+1)k)}(0) < f^{(lk)}(0) + r + 1, \quad l=0,1,\ldots,n-1.$$

Сложив все такие неравенства, получим, что $nr < f^{(nk)}(0) < n(r+1)$

Запишем отдельно неравенство, получающееся при $n = 1$:

. $$r < f^{(k)}(0) < (r+1).$$

Таким образом $\left|\dfrac{f^{(nk)}(0)}{nk} - \dfrac{f^{(k)}(0)}{k}\right| < \dfrac{2}{k}.\left|\dfrac{f^{(nk)}(0)}{nk} - \dfrac{f^{(k)}(0)}{k}\right| < \dfrac{2}{k}.$

Ввиду произвольности n, k их можно поменять местами и сложить получающиеся два неравенства: $\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n} - \dfrac{f^{(k)}(0)}{k}\right| < \dfrac{2}{k} + \dfrac{2}{n}\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n} - \dfrac{f^{(k)}(0)}{k}\right| < \dfrac{2}{k} + \dfrac{2}{n}.$

Отсюда видно, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n} = \alpha$ существует при $x=0$, а значит, и при всех $x \in R$.

3) Остается показать, что если α рационально, то некоторая ненулевая степень F имеет неподвижную точку.

Пусть сперва $\alpha = 0$. Покажем, что F имеет неподвижную точку. Допустим, что такой точки нет. Тогда $f(x) - x \neq 0$ для любого x и поэтому можно считать, что $f(x) > x$ для всех действительных x. В частности, $f(0) > 0$, а значит, и

$f^{(n)}(0) > f^{(n-1)}(0) > \ldots > 0$ в силу монотонности f. Таким образом, $\{f^{(n)}(0)\}$ - монотонно возрастающая последовательность. Кроме того, $f^{(n)}(0) < 1$ для всех n. Действительно, если бы при некотором n_0 было $f^{(n_0)}(0) \geq 1$, то

$f^{(2n_0)}(0) \geq f^{(n_0)}(1) = f^{(n_0)}(0) + 1 \geq 2$ и вообще $f^{(kn_0)}(0) \geq k$, откуда

$\dfrac{f^{(kn_0)}(0)}{kn_0} \geq \dfrac{1}{n_0}$, что противоречит предположению $\alpha = 0$.

Итак, последовательность $\{f^{(n)}(0)\}$ монотонна и ограничена.

Пусть $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0)$. Тогда $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(f(0)) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n+1)}(0) = x_0$,

т.е. x_0 определяет на окружности точку, неподвижную относительно F.

Пусть теперь α - любое рациональное, $\alpha = r/k$. Тогда функция $g(x) = f^{(k)}(x) - r$ представляет гомеоморфизм F^k; кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g^{(n)}(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(kn)}(x)}{r} - r = k \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(kn)}(x)}{kn} - r = 0.$$

Поэтому, как было показано выше, существует точка, неподвижная относительно F^k. Теорема доказана.

Число α зависит, разумеется, от функции f, представляющей гомеоморфизм F: $\alpha = \alpha(F, f)$. Но если $f_1(x) = f_2(x) + k$, то, очевидно, $\alpha(F, f_1) = \alpha(F, f_2) + k$.

Это позволяет ввести следующее важное определение.

Определение 1. Пусть F - сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности S^1, $f(x)$ — представляющая его функция. Число

$$\alpha = \alpha(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} \bmod(1)$$

называется ***числом вращения*** гомеоморфизма F.

Легко убедиться, что число вращения является инвариантом топологической сопряженности.

Среди функций $f(x)$, представляющих гомеоморфизм F, имеется ровно одна такая, что $\alpha(F, f) = \alpha(F)$. В дальнейшем, говоря о функции, представляющей гомеоморфизм, мы будем, как правило, иметь в виду именно ее.

Так как всегда $0 \leq \alpha(F) < 1$, то $\alpha(F)$ можно считать точкой окружности S^1.

Кроме того, величину $\alpha(F)$ можно рассматривать как функцию (со значениями в S^1) на компактном метрическом пространстве C всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности с метрикой, эквивалентной рассмотренной в предыдущем параграфе

$$d(F_1,F_2)=\sup_{x\in S^1}(d(F_1(x),F_2(x))+\sup_{x\in S^1}(d(F_1^{-1}(x),F_2^{-1}(x)).$$

Теорема 2. Функция $\alpha(F)$ непрерывна в каждой точке $F_0\in C$.

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon>0$. Выберем натуральное $k>1/\varepsilon$ и целое r так, чтобы $r/k<\alpha(F_0)<(r+1)/k$.

Пусть функция $f_0(x)$ представляет гомеоморфизм F_0, причем

$\alpha(F_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_0^{(n)}(x)}{n}$. Покажем, что для всех $x\in R$ выполнено $f_0^{(k)}(x)>x+r$.

Действительно, если неравенство выполнено для некоторых, но не для всех x, то найдется $x_0\in R$, для которого $f_0(x_0)=x_0+r$. Тогда

$$\alpha(F_0)=\lim_{l\to\infty}\frac{f_0^{(lk)}(x_0)}{lk}=\lim_{l\to\infty}\frac{x_0+lr}{lk}=r/k,$$

что противоречит выбору r. Если же $f_0^{(k)}(x)<x+r$ для всех x, то $\alpha(F_0)\le r/k$. Тем самым неравенство доказано.

Аналогично доказывается, что $f_0^{(k)}(x)<x+r+1$ для всех x.

Так как $f_0^{(k)}(x)-x$ - непрерывная периодическая функция, то из доказанного вытекает, что при некотором $\eta>0$ выполнено $r+\eta<f_0^{(k)}(x)-x<r+1-\eta$.

В силу непрерывной зависимости F^k от F, найдется такое $\delta>0$, что для любого гомеоморфизма $F\in C$, удовлетворяющего условию $d(F,F_0)<\delta$, и для некоторой функции $f(x)$, представляющей F, будет выполнено неравенство $\left|f^{(k)}(x)-f_0^{(k)}(x)\right|<\eta,\ x\in R$. Для таких F: $r<f^{(k)}(x)-x<r+1$. Отсюда, повторяя предыдущие рассуждения, выводим, что $\dfrac{r}{k}<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{n}<\dfrac{r+1}{k}$, т.е. $\left|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{n}-\alpha(F_0)\right|<1/k<\varepsilon$. Но $\alpha(F)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{n}\operatorname{mod}(1)$. Поэтому $d(\alpha(F),\alpha(F_0))<\varepsilon$. Теорема доказана.

Изучим более подробно структуру гомеоморфизма F с иррациональным числом вращения α. Рассмотрим для этого, кроме F, преобразование F_α поворота S^1 на угол α: $F_\alpha(x)=x+\alpha\operatorname{mod}(1)$.

Теорема 3. Если α иррационально, то существует непрерывное отображение $h:S^1\to S^1$, переводящее F в поворот F_α, т.е. $h(F(x))=F_\alpha(h(x))$ для всех $x\in S^1$.

2. Отображение h биективно (т.е. осуществляет гомеоморфизм S^1 на себя) тогда и только тогда, когда F- минимальный гомеоморфизм т.е. для любой точки $x \in S^1$ выполнено $\overline{\{F^n x\}} = S^1, \ \ n \in Z$.

Доказательство. Пусть μ - любая нормированная бэровская мера на S^1, инвариантная относительно F. По теореме 3 §1 главы 7 такие меры существуют. Зафиксируем точку $x_0 = 0$ на S^1 и для любого $x \in S^1$ положим

$$h(x) = \mu([x_0, x]).$$

Так как, в силу иррациональности α, F не имеет периодических точек, то мера μ непрерывна, и, следовательно, отображение h непрерывно. Для любых $x_1, x_2, x_3 \in S^1$

$$\mu([x_1, x_3]) = (\mu([x_1, x_2]) + \mu([x_2, x_3])(\mathrm{mod}(\ 1),$$

здесь под отрезком $[a, b]$ в случае $b< a$ мы понимаем $[a,b] = [a,1) \cup [0,b]$.

Пользуясь этим, запишем для произвольной точки $x \in S^1$:

$$h(F(x)) = \mu[x_0, F(x)] = (\mu[x_0, F(x_0)]) + \mu[F(x_0), F(x)])\,\mathrm{mod}(\ 1) =$$

$$= \mu[x_0, F(x)] = (\mu[x_0, F(x_0)]) + \mu[x_0, x])\,\mathrm{mod}(\ 1) = (h(x) + \beta)\,\mathrm{mod}(\ 1),$$

где $\beta = \mu[x_0, F(x_0)]$.

Покажем, что $\beta = \alpha$. Пусть $f(x)$, $x \in R$ - функция, представляющая F, $0 \le f(x_0) < 1$. Рассмотрим на R бесконечную меру ν, совпадающую на каждом отрезке $[k, k+1]$, k - целое, с мерой μ, перенесенной на $[k, k+1]$. Из инвариантности μ вытекает, что

$$\nu([f^{(n)}(x_0), f^{(n+1)}(x_0)]) = \nu([x_0, f(x_0)]), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Поэтому $$\beta = \mu([x_0, F(x_0)]) = \nu([(x_0), f(x_0)]) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \nu([f^{(k)}(x_0), f^{(k+1)}(x_0)]) = \frac{1}{n} \nu([x_0, f^{(n)}(x_0)]).$$

Пусть $m_n < f^{(n)}(x_0) < m_n + 1$, m_n - целое. Тогда, очевидно, $m_n < \nu([x_0, f^{(n)}(x_0)]) < m_n + 1$. Отсюда

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n} \mathrm{mod}(\ 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} (\mathrm{mod}\ \ 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\nu([x_0, f^{(n)}(x_0)])}{n} (\mathrm{mod}\ \ 1) = \beta (\mathrm{mod}\ \ 1).$$

Так как $0 \le \alpha, \beta < 1$, то первое утверждение теоремы доказано.

2. Если h - гомеоморфизм, то траектория $\{F^n x\}$ любой точки $x \in S^1$ есть прообраз относительно h траектории $\left\{F_\alpha^n h(x)\right\}$, которая всюду плотна в S^1. Поэтому $\{F^n x\}$ также всюду плотна, т.е. F - минимален.

Обратно, если F минимален, то по теореме 3 § 2 главы 7 мера μ любого отрезка $[x_0, x]$ положительна. Из формулы $h(x) = \mu([x_0, x])$ вытекает тогда, что $h(x)$ - строго возрастающая функция, т.е. h - гомеоморфизм . Теорема доказана.

Для произвольной точки $x_0 \in S^1$ рассмотрим теперь замкнутое множество $\Omega \subseteq S^1$ всех предельных точек траектории $\{F^n x_0\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Множество Ω не зависит от $x_0 \in S^1$.

2. Ω инвариантно относительно F.

3. Либо $\Omega = S^1$, либо Ω - совершенное нигде не плотное подмножество S^1.

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма . Пусть m, n - целые числа, $m \ne n$; $\triangle, \triangle'$ - две дуги окружности S^1, соединяющие точки $F^m x_0$, $F^n x_0$ (если, например, $F^n x_0 < F^m x_0$, то $\triangle = [F^n x_0, F^m x_0]$, $\triangle' = [F^m x_0, 1) \cup [0, F^n x_0]$. Тогда каждая из этих дуг имеет непустое пересечение с траекторией любой точки $x \in S^1$.

Доказательство леммы. Рассмотрим, например, дугу $\triangle$. Дуги $\triangle, (F^{m-n}\triangle), (F^{2(m-n)}\triangle)...$ примыкают друг к другу. Кроме того, объединение $\triangle \cup (F^{m-n}\triangle) \cup (F^{2(m-n)}\triangle) \cup ... \cup (F^{k(m-n)}\triangle)$ при достаточно большом k покрывает всю окружность S^1. Действительно, иначе последовательность чисел $f^{k(m-n))}(x_0)$, $k = 1,2,\ldots$, где $f(x)$ - функция, представляющая F, была бы монотонна и ограничена на R, т.е. имела бы предел $\tilde{x}$. Но тогда $f^{(m-n)}(\tilde{x}) = \lim_{k\to\infty} f^{(m-n)}(f^{k(m-n)}(x_0)) = \lim_{k\to\infty} f^{(k+1)(m-n)}(x_0) = \tilde{x}$.

Отсюда вытекает, что $\tilde{x} \bmod(1)$ неподвижная точка для F^{m-n}, что невозможно, так как α иррационально. Поэтому для любого $x \in S^1$ найдется такое l, что $x \in F^{l(m-n)}(\triangle)$ т.е. $F^{-l(m-n)}(x) \in \triangle$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $x_1, x_2 \in S^1$ и Ω_i - множество предельных точек траектории $\{F^n x_i\}$, i=1,2. Для любой точки $x \in \Omega_1$ найдется последовательность точек вида $x_1^{(k)} = F^{n_k} x_1 \to x$ при $k \to \infty$. В силу леммы 1, на кратчайшей дуге $\triangle_k$, соединяющей $x_1^{(k)}$ и $x_1^{(k+1)}$, найдется точка $x_2^{(k)}$ вида $F^{m_k}x_2$. Тогда $x_2^{(k)} \to x$ при $k \to \infty$; и значит, $x \in \Omega_2$. Итак, $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, значит, в силу симметрии, $\Omega_1 = \Omega_2$.

2. Пусть точка $x \in \Omega$ Тогда $x = \lim\limits_{k\to\infty} F^{n_k}x_0$, $x_0 \in S^1$. Отсюда $Fx = \lim\limits_{k\to\infty} F^{n_k+1}x_0$, $F^{-1}x = \lim\limits_{k\to\infty} F^{n_k-1}x_0$, т.е. Fx, $F^{-1}x \in \Omega$. Это и означает инвариантность Ω.

3. Если точка $x \in \Omega$, то $x = \lim\limits_{k\to\infty} F^{n_k}x$ для некоторой последовательности n_k - целых чисел. Так как, в силу инвариантности Ω, $F^{n_k}x \in \Omega$, то x - предельная точка для Ω, т.е. Ω - совершенное множество.

Допустим, что Ω не является нигде не плотным. Тогда оно плотно на некоторой дуге $\triangle \subset S^1$, и мы можем считать, что $\triangle$ имеет вид $\triangle = [F^n x_0, F^m x_0]$. Но как было показано в доказательстве леммы, конечное число сдвигов относительно F^{m-n} такой дуги покрывают всю окружность S^1. В силу инвариантности Ω отсюда вытекает, что оно всюду плотно на S^1, а, в силу замкнутости, $\Omega = S^1$. Теорема доказана.

Эта теорема делает корректным следующее определение.

Определение 2. Пусть F - гомеоморфизм окружности S^1 с иррациональным числом вращения. Множество Р предельных точек траектории $\{F^n x\}$ любой точки $x \in S^1$ называется ***производным множеством*** для F.

Ясно, что Р = S^1 тогда и только тогда, когда F — минимальный гомеоморфизм (например, сдвиг: $Fx = x + \alpha (\mathrm{mod}\ 1)$).

В отличии от потоков даже у гомеоморфизмов окружности производное множество может быть нигде не плотным.

Теорема 5. 1. Любой гомеоморфизм F окружности S^1 с иррациональным числом вращения α строго эргодичен.

2. Носителем инвариантной меры μ для F является производное множество Р, т.е. $\mu(\mathrm{P}) = 1$и Р — наименьшее замкнутое множество меры 1.

Доказательство. 1. Пусть μ_1и μ_2 - две нормированные бэровские меры на S^1, инвариантные относительно F, $\mu = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2}$. Ясно, что μ также инвариантна.

Рассмотрим отображение $h: S^1 \to S^1$, заданное формулой $h(x) = \mu([x_0, x])$, где $x_0 \in S^1$- фиксированная точка, например, $x_0 = 0$.

Как было показано в доказательстве теоремы 3, h непрерывно и переводит F в поворот F_α. Любая бэровская мера ν на S^1 переходит под действием h в меру $h\nu$: $(h\nu)(A)\overset{\text{def}}{=}\nu(h^{-1}(A))$, где $(h^{-1}(A)$ -полный прообраз множества $A\in\wp$. Так как инвариантные относительно F меры переходят при этом в меры, инвариантные относительно F_α, а F_α строго эргодичен, то $h(\mu_1)=h(\mu_2)=\rho$, где ρ - мера Лебега на S^1.

Пусть $\wp_h\subseteq\wp$ - σ - алгебра подмножеств S^1, являющихся полными прообразами, относительно h, всевозможных бэровских множеств. Тогда на множествах $A\in\wp_h$ меры μ_1 и μ_2 совпадают. Действительно, если $A=h^{-1}(B)$, $B\in\wp$, то $\mu_1(A)=\mu_1(h^{-1}(B))=(h\mu_1)(B)=\rho(B)$. Аналогично $\mu_2(A)=\rho(B)$, т.е. $\mu_1(A)=\mu_2(A)$. Пусть теперь $\triangle=(a,b)\subset S^1$ - произвольный интервал. Из формулы $h(x)=\mu([x_0,x])$ вытекает, что $h(\triangle)$ - также некоторый интервал (c,d). Далее, полный прообраз $\triangle'=h^{-1}(h(\triangle))$ - также некоторый интервал (a',b'), причем $\triangle'\supseteq\triangle$. Равенство $h(\triangle)=h(\triangle')$ означает, что $h(a)=h(a')=c$, $h(b)=h(b')=d$. Отсюда $\mu(\triangle'\backslash\triangle)=\mu((a',a)\cup(b,b'))=0$. Так как меры μ_1 и μ_2 абсолютно непрерывны относительно μ, то $\mu_1(\triangle'\backslash\triangle)=\mu_2(\triangle'\backslash\triangle)=0$, т.е. $\mu_1(\triangle)=\mu_1(\triangle'),\mu_2(\triangle)=\mu_2(\triangle')$.

Но $\triangle'\in\wp_h$, поэтому $\mu_1(\triangle')=\mu_2(\triangle')$.

Таким образом, получаем $\mu_1(\triangle)=\mu_2(\triangle)$. Так как бэровская мера определяется своими значениями на интервалах, то $\mu_1=\mu_2$. Первое утверждение теоремы доказано.

2. Если P = S^1, то F - минимальный гомеоморфизм, $\mu(G)>0$ для любого непустого открытого множества G и поэтому S^1 - носитель μ. Пусть P нигде не плотно, $\triangle\subset S^1$ - интервал, лежащий строго внутри некоторого дополнительного к P интервала (a,b). Возьмем интервал $\triangle'$ такой, что $\triangle\subset\triangle'\subset(a,b)$, причем включения строгие, и рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$ на S^1 такую, что $0\le f(x)\le 1$, $f(x)=1$ для $x\in\triangle$, $f(x)=0$ для $x\notin\triangle'$.

В силу строгой эргодичности F

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(F^kx)=\int_{S^1}f(x)d\mu$$

для любой точки $x \in S^1$. Но из определения множества Р вытекает, что траектория любой точки $x \in S^1$ лишь конечное число раз попадает в $\triangle'$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(F^k x) = 0, \text{ т.е.} \int_{S^1} f(x)d\mu = 0.$$

Значит $\mu(\triangle) \le \int_{S^1} f(x)d\mu = 0$. В силу произвольности $\triangle$ отсюда вытекает, что

$\mu(\mathrm{P}) = 1$. Далее, если бы нашлось замкнутое множество $\mathrm{P}' \subset \mathrm{P}$, $\mu(\mathrm{P}') = 1$,

$\mathrm{P}' \ne \mathrm{P}$, то $\mathrm{P}_1' = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} F^n \mathrm{P}'$ было бы инвариантным замкнутым множеством, и, стало быть, все предельные точки любой траектории $\{F^n x\}$, $x \in \mathrm{P}_1'$ содержались бы в P_1', что противоречит определению Р. Теорема доказана.

8.2.2. Теорема Данжуа

В этом пункте мы рассмотрим сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности S^1. К ним, разумеется, относятся все результаты предыдущего пункта. Более того, эти результаты в случае диффеоморфизмов допускают существенное уточнение, которому и посвящена доказываемая ниже теорема .

Теорема (Данжуа). Пусть F - диффеоморфизм окружности S^1 с иррациональным числом вращения α. Если функция $f(x)$, определяющая F, имеет непрерывную производную $\frac{df}{dx} > 0$ с ограниченной вариацией на [0,1), тогда F топологически эквивалентен повороту F_α.

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма . Пусть F - гомеоморфизм S^1 с иррациональным числом вращения α; $g(x)$ ($x \in S^1$) - непрерывная функция на S^1 с ограниченной вариацией Var(g);

μ - единственная нормированная инвариантная мера для F;

p/q - несократимая дробь такая, что $|\alpha - p/q| \le 1/q^2$.

Тогда для любого $x_0 \in S^1$

$$\left|\sum_{k=0}^{q-1} g(F^k x_0) - q\int g(x)d\mu\right| \le \mathrm{Var}(g).$$

Эту лемму для преобразования F_α мы использовали в п.6.2.2..

Доказательство леммы. Мы можем считать, что $x_0 = 0$. Общий случай сводится к этому заменой переменной $x' = x - x_0 (\mathrm{mod}(\ 1))$. Будем, кроме того, считать, что $0<\alpha-\dfrac{p}{q}<\dfrac{1}{q^2}$; противоположное неравенство $0<-\alpha+\dfrac{p}{q}<\dfrac{1}{q^2}$ рассматривается аналогично.

При k = 1, 2, …, q-1 возьмем точку $x_k\in S^1$ такую, что $\mu([0,x_k])=k/q$; при k=q положим x_q = 1. Обозначим через $\triangle_k$ интервал (x_k, x_{k+1}) и докажем, что $F^k x_0\in\triangle_{kp(\mathrm{mod}\ q)}$, k=1,2,…,q-1.

Рассмотрим для этого отображение h, построенное в теореме 3 предыдущего пункта и переводящее F в поворот F_α. При этом точка $F^k x_0$ переходит в $F_\alpha^k x_0=k\alpha\,\mathrm{mod}(\ 1)$, а интервал $\triangle_k$ - в интервал $\tilde{\triangle}=(k/q,(k+1)/q)$.

Из неравенства $0<\alpha-\dfrac{p}{q}<\dfrac{1}{q^2}$ следует, что $0<k\alpha-kp/q\le k/q^2<1/q$,

т.е. $F_\alpha^k x_0\in\triangle_{kp(\mathrm{mod}(\ q)}$.

Так как отображение h не меняет циклического порядка точек на окружности, то из $F_\alpha^k x_0\in\triangle_{kp(\mathrm{mod}(\ q)}$ следует, что $F^k x_0\in\triangle_{kp(\mathrm{mod}\ q)}$. Включение $F^k x_0\in\triangle_{kp(\mathrm{mod}\ q)}$ справедливо и при k = 0, если положить $\triangle_0=[0,1/q]$. Заметим, что, так как p, q взаимно просты, то последовательность $\{\triangle_{kp(\mathrm{mod}(\ q))}\}$ $(0\le k<q-1)$, - это просто переставленная последовательность $\triangle_0,\triangle_1,\ldots,\triangle_{q-1}$. Пользуясь этим, получим

$$\left|\sum_{k=0}^{q-1}g(F^k x_0)-q\int_{s^1}g(x)d\mu\right|=\left|\sum_{k=0}^{q-1}g(F^k x_0)-q\sum_{k=0}^{q-1}\int_{\triangle_k}g(x)d\mu\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{q-1}g(F^k x_0)-q\sum_{k=0}^{q-1}\int_{\triangle_{kp\,\mathrm{mod}(\ q}}g(x)d\mu\right|\le q\sum_{k=0}^{q-1}\left|\int_{\triangle_{kp\,\mathrm{mod}(\ q}}[g(x)-g(F^k(x)]d\mu\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{q-1}\sup_{x\in\triangle_{kp(\mathrm{mod}(\ q}}\left|g(x)-g(F^k x_0)\right|\le\mathrm{Var(g)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу теоремы 3 предыдущего пункта достаточно доказать, что диффеоморфизм F минимален, т.е. что его производное множество есть вся окружность. Допустим, вопреки нашему утверждению, что $\mathrm{P}\ne S^1$ и $\triangle_0$ - некоторый дополнительный интервал в Р. Так как множество Р инвариантно относительно F, то интервалы $\triangle_k=F^k\triangle_0$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ - также дополнительные интервалы к Р. Если бы при некотором $k \neq 0$ было $\triangle_k = \triangle_0$, то, в силу сохранения ориентации, концевые точки интервала $\triangle_0$ были бы неподвижными для F^k, что невозможно при иррациональном α. Отсюда следует, что $\triangle_{k_1} \neq \triangle_{k_2}$ при $k_1 \neq k_2$, т.е. все $\triangle_k$ - различные дополнительные интервалы.

Но тогда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \rho(\triangle_k) \leq 1$, где ρ - мера Лебега.

Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$, которое уточним позже. Среди интервалов $\triangle_k$ имеется лишь конечное число $\triangle^{(1)},...,\triangle^{(N)}$ таких, что $\rho(\triangle^{(i)}) \geq \varepsilon_0 \rho(\triangle_0)$. Пусть $\triangle^{(i)} = F^{k_i} \triangle_0$. Тогда при любом $q > \max\limits_{1 \leq i \leq N} \{k_i\}$ будет $\rho(F^q \triangle_0) < \varepsilon_0 \rho(\triangle_0)$.

Отметим, что $\rho(F^q \triangle_0) = \int\limits_{\triangle_0} \frac{df^{(q)}}{dx} dx$,где $f^{(q)}$ - функция, представляющая F^q. Таким образом получаем, что $\inf\limits_{x \in \triangle_0} \frac{df^{(q)}}{dx} < \varepsilon_0$.

По формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{df^{(q)}}{dx}(x) = \prod_{k=0}^{q-1} \frac{df}{dx}(f^{(k)}(x)) = \prod_{k=0}^{q-1} \frac{df}{dx}(F^k x).$$

Последнее равенство вытекает из того, что $\frac{df}{dx}$ имеет период 1. Положим

$g(x) = \ln \frac{df}{dx}$. Функция $g(x)$ имеет на $[0,1)$ ограниченную вариацию $\mathrm{Var}(g)$.

Логарифмируя соотношение для производной $\frac{df^{(q)}}{dx}(x)$, получим

$$\ln \frac{df^{(q)}}{dx}(x) = \sum_{k=0}^{q-1} g(F^k x).$$

Найдем значение $\int\limits_{S^1} g(x) d\mu \overset{\text{def}}{=} a$. В силу строгой эргодичности F

$$\lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} (\ln \frac{df^{(q)}}{dx}(x)) = \lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} g(F^k x) = a.$$

равномерно по $x \in S^1$. При a>0 было бы $\frac{df^{(q)}}{dx}(x) \to +\infty$ при a<0 было бы $\frac{df^{(q)}}{dx}(x) \to -\infty$ при $q \to \infty$, причем в обоих случаях сходимость равномерная. Каждое из этих соотношений противоречит тому, что $\int\limits_{S^1} \frac{df^{(q)}}{dx} dx = 1$, поэтому $a = 0$.

Для любого α можно найти сколь угодно большое натуральное q такое, что при некотором p, взаимно простом с q, будет $|\alpha - p/q| \le 1/q^2$. Выберем q так, чтобы выполнялось также $q > \max\limits_{1 \le i \le N}\{k_i\}$. Тогда, в силу леммы ,

$$\left| \ln \frac{df^{(q)}}{dx}(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{q-1} g(F^k x) \right| \le \operatorname{Var}(g).$$

Но неравенство $\inf\limits_{x \in \Delta_0} \frac{df^{(q)}}{dx} < \varepsilon_0$ означает, что $\sup\limits_{x \in \Delta_0} \left| \ln \frac{df^{(q)}}{dx} \right| > \ln \frac{1}{\varepsilon_0}$.

При ε_0 таких, что $\left(\ln \frac{1}{\varepsilon_0} \right) > \operatorname{Var}(g)$, полученные неравенства противоречивы.

Теорема доказана.

Замечание о приближении иррациональных чисел рациональными.

Утверждение. Для любого иррационального числа α найдется последовательность несократимых дробей $\frac{p_k}{q_k}$ такая, что $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \le \frac{1}{q_k^2}$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{p_k}{q_k} = \alpha$.

Доказательство . Не ограничивая общности, можем считать $\alpha > 0$. Рассмотрим плоскость с координатами (x, y). Проведем прямую $y = \alpha x$, находящуюся в первом квадранте. Отметим в первом квадранте все точки с целыми координатами. Исключая точку О, они не лежат на нашей прямой, так как α иррационально. Обозначим через e_{-1} базисный вектор (1, 0) и через e_0 – вектор (0, 1). Эти векторы лежат по разные стороны от прямой $y = \alpha x$. Будем строить последовательность векторов e_1 , e_2, ... по следующему правилу. Пусть e_{k-1} и e_k уже построены и лежат по разные стороны от нашей прямой. Будем прибавлять к вектору e_{k-1} вектор e_k столько раз, сколько можно, чтобы сумма лежала по ту же сторону от прямой $y = \alpha x$, что и e_{k-1} . Таким образом, получаем последовательность натуральных. чисел a_k и последовательность целочисленных векторов $e_1 = e_{-1} + a_0 e_0, \ldots, e_{k+1} = e_{k-1} + a_k e_k, \ldots$.

Площадь параллелограмма, натянутого на векторы (e_{k-1}, e_k), равна (с учетом ориентации) $(-1)^k$.

Для исходного параллелограмма (e_{-1}, e_0) это очевидно. Каждый следующий параллелограмм имеет с предыдущим общую сторону, равную высоту и задает противоположную ориентацию плоскости.

Обозначим координаты точки e_k через q_k и p_k, и пусть $y=\dfrac{p_k}{q_k}x$ - прямые, проходящие через точки e_k. Разность двух последовательных угловых коэффициентов равна $\left|\dfrac{p_k}{q_k}-\dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right|=\dfrac{1}{q_k q_{r+1}}$. Действительно, при приведении дробей к общему знаменателю числителем оказывается определитель из компонент векторов e_{k+1} и e_k, равный площади параллелограмма, построенного на векторахe_{k+1} и e_k.

Исходя из того, что, что векторы e_k лежат попеременно то по одну, то по другую сторону от прямой $y=\alpha x$, соответствующие прямые$y=\dfrac{p_k}{q_k}x$ в первом квадранте то выше, то ниже прямой $y=\alpha x$. Так построенные числа

$\dfrac{p_k}{q_k}$ называют подходящими дробями числа α. Разность междуα и подходящей дробью меньше модуля разности между этой подходящей дробью и следующей, что равно $1/q_k q_{k+1}$, что, в свою очередь, и не больше $1/q_k^2$, так как $q_{k+1}\geq q_k$. Утверждение доказано.

Числа a_k называются неполными частными. Подходящие дроби выражаются через неполные частные так:

$$\frac{p_k}{q_k}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\ddots}{1/a_{k-1}}}}.$$

Выражение $a_0+\dfrac{1}{a_1+\ldots}$ называется ***бесконечной цепной дробью.***

8.2.3. Потоки на торе

В этом пункте мы рассмотрим поток на торе $F:R\times T^2\to T^2$, определяемый системой дифференциальных уравнений

$$\dot{u}=\varphi_1(u,v),$$

$$\dot{v} = \varphi_2(u,v)\,, \qquad (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), (*)$$

где x =(u,v) - циклические координаты, $\varphi_1(u,v)$, $\varphi_2(u,v)$ - 1- периодические функции своих аргументов. Для того, чтобы применить результаты предыдущих двух пунктов, нам потребуется лемма, гарантирующая возможность построения отображения последования.

Лемма . Пусть T^2 - тор и $F(t,x)$ - поток на T^2 класса C^k, $k \geq 1$(или непрерывный поток такой, что $F(t,x)$ имеет непрерывные частные производные по t). Предположим, что $F(t,x)$ не имеет точек покоя (или что $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \neq 0$). Тогда существует жорданова кривая Σ класса C^k (или C^1) на T^2, которая трансверсальна к потоку. Кроме того, эта трансверсальная кривая Σ не может быть стянутой в точку по T^2, так что Σ не ограничивает 2-клетки (т.е. подмножества тора, гомеоморфного диску).

Например, пусть $\varphi_1(u,v) \neq 0$ и $\varphi(u,v) = \dfrac{\varphi_2(u,v)}{\varphi_1(u,v)}$ так, что система (*) имеет те же самые орбиты, что и уравнение, полученное заменой времени $\dot{u} = 1,\ \dot{v} = \varphi(u,v)$.

Здесь каждая окружность u = const на T^2 есть трансверсальная кривая Σ.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальные уравнения ортогональных траекторий $\dot{u} = \varphi_2(u,v)$, $\dot{v} = -\varphi_1(u,v)$, порождающее поток $G(t, x)$. Поток $G(t, x)$ не имеет точек покоя и касательные векторные поля потоков $G(t, x)$ и $F(t,x)$ в каждой общей точке порождают $T(T^2)$. Если $G(t, x)$ имеет периодическую траекторию, то ясно что она и будет искомой трансверсалью Σ. Если $G(t, x)$ не имеет периодических траекторий, то найдем ω- предельную точку, скажем (u_1, v_1). Точка (u_1, v_1) содержится в произвольно малом криволинейном прямоугольнике K: $ABCD$ на T^2, у которого дуги AB и CD суть дуги траекторий решений системы $F(t,x)$, а BC и AD—дуги решений системы $G(t, x)$. Точка (u_0 (t), v_0 (t))$\in G(I_+, x_0)$ находится внутри K для некоторого большого t = t_0 и выходит из него в некоторой точке P_1 на CD (или AB) при дальнейшем изменении t, например в первый раз при $t_1 > t_0$; затем она встречает AB (или CD), при некотором значении $t_2 > t_1$, впервые в точке P_2. Ясно, что если прямоугольник K достаточно мал, то в K найдется дуга P_2P_1, которая вместе с дугой ($u_0(t)$, $v_0(t)$) для $t_1 < t < t_2$ составит трансверсаль Σ класса C^k.

Допустим, что трансверсаль Σ на M может быть стянута в точку. Тогда она имеет на (u,v)-плоскости образ Σ, являющийся жордановой кривой класса C^1, которая ограничивает открытое множество U^0. Ясно, что точки на Σ являются одновременно или точками входа, или точками выхода для области U^0 по отношению к системе $G(t,x)$. Тогда по теореме Брауэра о неподвижной точке, U^0 содержит, по крайней мере, одну точку покоя, что противоречит предположению. Лемма доказана.

В последующем мы будем предполагать, что

I) T^2 есть тор, а $k \geq 1$, $F(t,x)$ - поток на T^2 класса C^k, $k \geq 1$, не имеющий точек покоя.

Пусть Σ - трансверсаль потока $F(t,x)$ на T^2. После применения подходящего C^k-гомеоморфизма плоскости можно считать, что

II) окружность Σ: $x = 0$ является трансверсальной кривой. В частности, $\varphi_1(n,v) \neq 0$ при $n = 0, \pm1,...$. Без потери общности можно предположить, что $\varphi_1(n,v) > 0$, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$, так как в противном случае t можно заменить на $-t$.

Пусть $x_0 = (0,v_0)$ - некоторая точка из $\Sigma \subset T^2$; предположим, что полутраектория $F(I_+, x_0)$, проходящая через x_0, встречает Σ снова при некотором $t_1 > 0$. Пусть x_1 есть точка этой первой встречи. Другими словами, если $x_0 = (0, v_0)$, то существует единственное $t_1 > 0$ такое, что $F^1(t_1, (0, v_0)) = 1$ и потому $x_1 = (1, F^2(t_1, (0, v_0)))$. Положим $f(v_0) = F^2(t_1, (0, v_0))$. Будем также предполагать, что

III) каждая траектория встречается с Σ, и функция $v_1 = f(v)$ определена для всех $v, -\infty < v < +\infty$.

Предположение III) выполняется, например, если $F^1(t,x)$ не обращается в нуль, так что система $F(t,x)$ «эквивалентна» уравнению $\dot{u} = 1$, $\dot{v} = \varphi(u,v)$, или если нет замкнутых траекторий. Нетрудно убедиться в том, что при сделанных предположениях $f(v)$ - представляющая функция гомеоморфизма, а в случае гладкости потока и диффеоморфизма $F: \Sigma \to \Sigma$.

Исходя из результатов п.8.2.1, мы получим теперь некоторые теоремы о потоках на торе. Назовем число α для функции $f(v)$ ***числом вращения потока*** $F(t,x)$. Тогда получается следующая

Теорема 1. Пусть $F(t,x)$ - поток класса C^1 на торе T^2, удовлетворяющий предположениям I), II) и III). Тогда для существования периодической (замкнутой) орбиты необходимо и достаточно, чтобы число вращения α потока $F(t,x)$ было рациональным.

Теорема 2. Пусть $F(t,x)$ - поток класса C^2 на торе T^2, удовлетворяющий предположениям I), II) и III), и пусть его число вращения α иррационально. Тогда T^2 является минимальным множеством, и каждая полутраектория плотна в T^2.

В заключение этого параграфа приведем результаты связанные с «обычным» поведением, которое в данном случае оказывается также и «устойчивым» поведением диффеоморфизмов окружности. В отличие от классической теории, типичное поведение траекторий оказывается очень простым.

Начнем с введения некоторых терминов.

Определение 2. Пусть $F \in \mathrm{Diff}(S^1)$, $x \in S^1$. Точка x называется ***гиперболической*** неподвижной точкой диффеоморфизма F, если $F(x)=x$ и $dF/dx \neq \pm 1$.

Если $|dF/dx| < 1$, точка x называется ***стоком*** или ***притягивающей точкой***.

При $|dF/dx| > 1$ точка x называется ***источником*** или ***отталкивающей точкой.***

Периодическая точка периода m называется ***гиперболической*** (соответственно ***притягивающей*** или ***отталкивающей***), если она обладает соответствующим свойством как неподвижная точка диффеоморфизма F^m.

Результаты теории типичных диффеоморфизмов окружности можно сформулировать в виде одной теоремы.

Теорема 3. (Пейксото-Плисса). Подмножество пространства $\mathrm{Diff}^r(S^1)$ $(r \geq 1)$, состоящее из диффеоморфизмов, обладающих свойствами:

1) множество неблуждающих точек – конечное множество;

2) все периодические точки F - гиперболические,

открыто и плотно в этом пространстве.

Любой диффеоморфизм, удовлетворяющий условиям 1) и 2), структурно устойчив.

Заметим, что конечное инвариантное множество должно состоять из периодических точек, поэтому из условия 1) следует, что все неблуждающие точки F на самом деле периодические.

Можно ограничиться рассмотрением отображений, сохраняющих ориентацию. Ядро теории составляет следующая лемма.

Лемма 1. (лемма о замыкании). Если $F \in \mathrm{Diff}^r(S^1)$, $x \in S^1$ - неблуждающая точка, то найдется сколь угодно близкий к F в C^r-топологии диффеоморфизм $\tilde{F}$, для которого x – периодическая точка.

План доказательства этого результата состоит в следующем. Доказывают типичность свойства 2), а тогда уже нетрудно доказать типичность свойства 1) и структурную устойчивость.

Решающее соображение здесь состоит в том, что гиперболичность неподвижной точки x эквивалентна трансверсальности пересечения графика gr(F) с диагональю тора $S^1 \times S^1$ в точке (x, x), а трансверсальность является типичным свойством. Произвольный диффеоморфизм легко аппроксимировать таким диффеоморфизмом, все периодические точки которого гиперболические. Однако, в процессе аппроксимации можно утратить те преимущества, которые извлекают из применения леммы о замыкании.

В частности, желательно возмутить данный диффеоморфизм так, чтобы получить диффеоморфизм с рациональным числом вращения, и «быть уверенными в том, что каждая последующая аппроксимация также имеет рациональное число вращения». Первоначальная аппроксимация задается леммой о замыкании; устойчивость такого возмущения гарантируется следующими двумя леммами.

Лемма 2. Пусть $F \in \mathrm{Diff}^r(S^1)$, $x \in S^1$ - периодическая точка диффеоморфизма F с наименьшим периодом n, U - окрестность точки $x, \varepsilon > 0$. Тогда существует возмущение $\tilde{F}$ диффеоморфизма F, отличающееся от F не более чем на $\varepsilon > 0$ в C^r-метрике и такое, что $\tilde{F}^n(x) = x$, $\dfrac{d\tilde{F}^n}{dx}|_x \neq \pm 1$ и $\tilde{F}(x) = F(x)$ в $S^1 \setminus U$.

Лемма 3 (устойчивость гиперболических периодических точек). Пусть $F \in \mathrm{Diff}^r(S^1)$, $x \in S^1$ - гиперболическая периодическая точка F с периодом n. Тогда:

1) существует замкнутая окрестность U точки x, не содержащая других периодических точек;

2) существует такое $\varepsilon > 0$, что любой диффеоморфизм, ε - близкий к F в C^1 - топологии, имеет ровно одну гиперболическую периодическую точку в окрестности U.

Предпоследний шаг в нашем рассмотрении диффеоморфизмов окружности, с точки зрения «типичности», состоит в установлении того факта, что условие 2) выполняется для диффеоморфизмов, образующих массивное множество в пространстве $\mathrm{Diff}^r(S^1)$. Это частный случай одной общей теоремы.

Лемма 4. («теорема Купки - Смейла»). Пусть k - натуральное число. Обозначим через G_k множество всех тех диффеоморфизмов окружности, у которых все периодические точки периода k гиперболические. Тогда множество G_k открыто и всюду плотно в пространстве $\mathrm{Diff}^r(S^1)$ при $r \geq 1$.

Итак, «типичная» ситуация на окружности оказывается чрезвычайно простой: имеется конечное число периодических точек, причем притягивающие и отталкивающие точки чередуются. Таким образом, здесь не встречаются трудности, которые возникают в более общей ситуации (например в классической теории). Приведенный факт служит примером полного успеха подхода, основанного на рассмотрении «типичных» свойств: получена топологическая классификация диффеоморфизмов, образующих открытое плотное подмножество в пространстве всех диффеоморфизмов, и построены очень простые модели для каждого класса сопряженных диффеоморфизмов.

§ 3. Теорема Гробмана - Хартмана

В этом параграфе рассматривается поведение решений автономной системы в окрестности стационарной точки простого типа или в окрестности периодического решения. Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1.(теорема Гробмана — Хартмана). Пусть V окрестность нуля в банаховом пространстве X, $F: V \to X$ - отображение, которое является C^1-диффеоморфизмом между V и $F(V)$, причем O - гиперболическая неподвижная точка F.

Тогда существуют окрестность нуля $U \subset V$ и гомеоморфизм h окрестности U на некоторую другую окрестность нуля в X такие, что для всех $z \in U$

$hL(z) = Fh(z)$, где $L = (DF)|_{z=0}$.

Этот результат первоначально был доказан в конечномерном случае Гробманом и Хартманом. Мы приведем доказательство, пригодное как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае. Это доказательство, основанное на одной идее Мозера, получили независимо Пейлис и Пью.

Первым и основным шагом в этом доказательстве является следующая теорема 2.

Пусть X,Y - банаховы пространства. Обозначим через $C^0(X,Y)$ банахово пространство непрерывных ограниченных отображений X в Y с нормой

$\|h\| = \sup\limits_{x \in X} \|h(x)\|$. Для краткости положим $C^0(X,X) \equiv C^0(X)$.

Напомним (п.3.1.3), что обратимое линейное отображение $L: X \to X$ называется гиперболическим, если его спектр не пересекается с единичной окружностью, и в пространстве X существует норма $\|\circ\|_1$, эквивалентная норме $\|\circ\|$, и разложение пространства X в прямую сумму инвариантных относительно L, подпространств X^s и X^u таких, что в операторной норме, порожденной нормой $\|\circ\|_1$, норма операторов $L_s = L|_{X^s}$ и $(L_u)^{-1} = (L|_{X^u})^{-1}$ меньше 1. В дальнейшем считаем, что в пространстве X введена указанная норма.

Теорема 2. Пусть L - гиперболическое линейное отображение банахова пространства X. Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого непрерывного ограниченного отображения $\varphi : X \to X$, для которого $Lip(\varphi) < \varepsilon$, найдется единственное отображение $h_\varphi \in C^0(X)$, удовлетворяющее уравнению

$$(I + h_\varphi) \circ L = (L + \varphi) \circ (I + h_\varphi),$$

где I – тождественное отображение и при достаточно малом ε отображение $I + h_\varphi$ - гомеоморфизм.

Эту теорему получим из следующей леммы:

Лемма 1. В предположениях теоремы 2 функциональное уравнение

$$(L + \psi) \circ (I + h) = (I + h) \circ (L + \varphi)) \qquad (*)$$

имеет единственное решение $h \in C^0(X)$ при условии, что точные константы Липшица отображений $\varphi, \psi \in C^0(X)$ меньше некоторого числа, зависящего только от L.

Доказательство леммы 1. 1). Если $Lip(\varphi) < \left\|L^{-1}\right\|^{-1}$, то по теореме об обратной функции (п.0.3.4), отображение $L + \varphi$ обратимо.

Раскрывая скобки в уравнении (*), приводим его к виду

$$L + Lh + \psi \circ (I + h) = L + \varphi + h \circ (L + \varphi),$$

или

$$Lh - h \circ (L + \varphi) = \varphi - \psi \circ (I + h) \ . \qquad (**)$$

Обозначим левую часть уравнения (**) через $\tilde{L}_\varphi(h)$ и положим $L'_\varphi(v) = L \circ v \circ (L + \varphi)^{-1}$. Тогда $\tilde{L}_\varphi = (L'_\varphi - I) \circ \alpha_{L+\varphi}$ (где $\alpha_A(v) = v \circ A$).

2). **Утверждение.** L'_φ - гиперболическое линейное отображение пространства $C^0(X)$.

Для доказательства мы покажем, что существует разложение, подобное описанному в (п.3.14).

Замечая, что пространство $C^0(X)$ разлагается в прямую сумму

$$C^0(X) = C^0(X, X^s) \oplus C^0(X, X^u),$$

положим

$$L^{s\prime}_\varphi = L'_\varphi | C^0(X, X^s), \qquad L^{u\prime}_\varphi = L'_\varphi | C^0(X, X^u).$$

Иначе говоря, $\quad L_\varphi^{s\,\prime} = L_s \circ v_s \circ (L+\varphi)^{-1}, \qquad L_\varphi^{u\,\prime} = L_u \circ v_u \circ (L+\varphi)^{-1},$

так что $\quad \left\| L_\varphi^{s\,\prime} \right\| = \| L_s \| \le \lambda < 1.$

Далее, так как $(L_\varphi^{u\,\prime})^{-1} = (L+\varphi) \circ v_u \circ L_u^{-1}$, то также и $\left\| (L_\varphi^{u\,\prime})^{-1} \right\| = \left\| L_u^{-1} \right\| \le \lambda < 1$.

3). **Утверждение**. Оператор $\tilde{L}_\varphi$ обратим, в $C^0(X)$, причем

$$\frac{1}{\|L\|+1} \le \left\| \tilde{L}_\varphi^{-1} \right\| \le \frac{1}{\min(1-\lambda, \lambda^{-1}-1)}.$$

Обратимость $\tilde{L}_\varphi$ следует из классического результата: если H - линейное гиперболическое отображение, то (H-I) - обратимое отображение (п.3.1.2)

Так как $\left\| \alpha_{(L+\varphi)^{-1}} \right\| = 1$, то для установления интересующих нас неравенств достаточно найти $\left\| (L_\varphi' - I)^{-1} \right\|$. Положим $H = L_\varphi'$. Тогда

$$(1+\lambda)\|x_s\| \ge \|x_s\| + \|H_s x_s\| \ge \|x_s - H_s x_s\| \ge \|x_s\| - \|H_s x_s\| \ge (1-\lambda)\|x_s\|,$$

$$(\|L_u\|+1)\|x_u\| \ge \|H_u x_u\| + \|x_u\| \ge \|H_u x_u - x_u\| \ge \|H_u x_u\| - \|x_u\| \ge (\lambda^{-1}-1)\|x_u\|.$$

Перейдя к обратным величинам, взяв максимум и заметив, что $\|L\| = \|L_u\|$, получим нужную оценку ($\|L\| \ge 1 > \lambda$)

$$\frac{1}{\max(\|L\|+1, \lambda+1)} \le \left\| (H-I)^{-1} \right\| \le \frac{1}{\min(1-\lambda, \lambda^{-1}-1)}.$$

4). Теперь уравнение (**) сводится к уравнению

$$h = \tilde{L}_\varphi^{-1}(\varphi - \psi \circ (I+h)) \ . \qquad (***)$$

Обозначим правую часть уравнения (***) через $A(h)$.

Утверждение. Если $Lip(\psi) < \left\| \tilde{L}_\varphi^{-1} \right\|^{-1}$, то A - сжимающее отображение в пространстве $C^0(X)$, т.е. $Lip(A) < 1$ < 1.

Действительно, $\|A(v) - A(w)\| = \left\| \tilde{L}_\varphi^{-1}(\varphi - \psi(I+v)) - \tilde{L}_\varphi^{-1}(\varphi - \psi(I+w)) \right\| =$

$$= \left\| \tilde{L}_\varphi^{-1}((\psi(I+v) - \psi(I+w)) \right\| \le \left\| \tilde{L}_\varphi^{-1} \right\| Lip(\psi) \|v-w\|.$$

5). Таким образом, если $Lip(\psi) < \min(1-\lambda, \lambda^{-1}-1)$, то отображение A заведомо имеет единственную неподвижную точку $h_{\psi\varphi} \in C^0(X)$, которая является решением уравнения (***), а, следовательно, также и решением уравнений (**) и (*). Лемма доказана.

Теперь с помощью леммы докажем теорему 2.
1). Положим в лемме $\psi=0$ и построим такое отображение h_φ, что

$$(I+h_\varphi)\circ(L+\varphi)=L\circ(I+h_\varphi).$$

2). С другой стороны, положим в лемме $\varphi=0$, и пусть отображение ψ в формулировке леммы играет роль отображения φ в формулировке теоремы. Тогда существует единственное отображение h'_φ такое, что

$$(I+h'_\varphi)\circ(L)=(L+\varphi)\circ(I+h'_\varphi).$$

3). Из 1) и 2) получаем $(I+h_\varphi)\circ(I+h'_\varphi)\circ(L)=L\circ(I+h_\varphi)\circ(I+h'_\varphi)$

и $\quad (I+h'_\varphi)\circ(I+h_\varphi)\circ(L+\varphi)=(L+\varphi)\circ(I+h'_\varphi)\circ(I+h_\varphi)$,

так что отображение $(I+h_\varphi)\circ(I+h'_\varphi)$ коммутирует с *L*, а $(I+h'_\varphi)\circ(I+h_\varphi)$ коммутирует с $(L+\varphi)$. Но из леммы, в частности, следует, что любое отображение вида *I+h,* где $h\in C^0(X)$, коммутирующее с L или с $(L+\varphi)$, тождественное, т.е. h =0. Таким образом, $(I+h_\varphi)\circ(I+h'_\varphi)=I$, откуда следует, что каждое из отображений $I+h_\varphi$ и $I+h'_\varphi$ - гомеоморфизм.
4). В заключение заметим, что в наших рассуждениях использовались только следующие предположения о малости φ - $Lip(\varphi)<\left\|L^{-1}\right\|^{-1}$ и ψ - $Lip(\psi)<\min\left(1-\lambda,\lambda^{-1}-1\right)$.

Таким образом, ограничения на точную константу Липшица отображений φ,ψ действительно зависят только от оператора *L*. Теорема доказана.
Теорема 2 является основным средством доказательства теоремы Гробмана - Хартмана. Нам остается только проверить предположения теоремы 2 в ситуации, к которой относится теорема Гробмана - Хартмана. Это делается при помощи следующей леммы:
Лемма 2. Пусть V - окрестность нуля в банаховом пространстве *X*, а $\varphi: V\to X$ - отображение класса C^1, удовлетворяющее условиям:
1) $\varphi(0)=0$;
2) $(D\varphi)|_{x=0}=0$.
Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдутся содержащее нуль открытое подмножество $W\subset V$ и отображение $\tilde\varphi: X\to X$, удовлетворяющие условиям
1) $\tilde\varphi|_W=\varphi|_W$,
2) $\tilde\varphi: X\to X$ - ограниченное отображение и $Lip(\tilde\varphi)<\varepsilon$.

Эта лемма утверждает, что в малой окрестности гиперболической неподвижной точки диффеоморфизм F можно считать малым возмущением его дифференциала в неподвижной точке в том смысле, что разность $F-(DF)|_{x=0}$ имеет малую константу Липшица. Это позволяет вывести теорему Гробмана - Хартмана из теоремы 2.

Доказательство леммы 2. (Пейлис). Пусть $\alpha : R \to [0,1]$ - функция класса C^{∞}, обладающая следующими свойствами:

1) $\alpha(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1/2, \\ 0, & |y| > 1, \end{cases}$

2) $|d\alpha / dy| < 3$.

Существование такой функции - стандартный факт, часто используемый в дифференциальной топологии.

В силу непрерывности дифференциала $D\varphi$ найдется такое число $\rho > 0$, что для любой точки z, принадлежащей открытому шару радиуса $B(0,\rho)$ с центром в нуле, имеет место неравенство $\|D\varphi\| < \varepsilon / 4$. Заметим, что в этом случае также $\|\varphi(z)\| < \varepsilon / 4$ при $\|z\| < \rho$.

Определим отображение $\tilde{\varphi}$ следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \alpha(\|z\|/\rho)\varphi(z) & \|z\| \le \rho, \\ 0 & \|z\| > \rho. \end{cases}$$

Нельзя утверждать, что отображение $\tilde{\varphi}$ дифференцируемо (это связано с возможной недифференцируемостью нормы как числовой функции в X. Однако отображение $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z)$, если $\|z\| < \rho / 2$,

2) отображение $\tilde{\varphi}$ ограничено (так как φ ограничено в малом шаре),

3) $Lip(\tilde{\varphi}) < \sup\limits_{\|z\| \le \rho} \|D\varphi\| + \dfrac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$.

Итак, отображение $\tilde{\varphi}$ обладает свойствами, о которых говорится в формулировке леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Применим лемму 2 к отображению $\varphi(z) = F(z) - L(z)$, определенному в окрестности V. Построим отображение $\tilde{\varphi}$, определенное на всем пространстве X, и положим $\tilde{F} = L + \tilde{\varphi}$.

Очевидно, в некоторой окрестности нуля отображение $\tilde{F}$ совпадает с отображением *F*. Если выбрать ε в утверждении леммы достаточно малым (за счет уменьшения окрестности, в которой $\tilde{\varphi}$ совпадает с φ), то отображение φ будет удовлетворять условиям теоремы 2, и тогда существует единственный гомеоморфизм *h* такой, что $h \circ L = \tilde{F} \circ h$.

Ограничение этого гомеоморфизма на окрестность, в которой $\tilde{F} \circ h = F \circ h$, удовлетворяет утверждению теоремы 1. Теорема Гробмана - Хартмана доказана.

Рассмотрим в банаховом пространстве X дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax + f(x), \qquad \text{(A)}$$

где спектр ограниченного оператора A не пересекается с мнимой осью, $f(x) \in C^1(X)$, $f(0)=0$ и $(Df)|_{x=0}=0$. Возникает естественный вопрос: существует ли диффеоморфизм некоторой окрестности нуля, переводящий траектории динамической системы, соответствующей системе (A) в траектории потока $L(t,x) = \exp(At)x$. В общем случае при $\dim(X)>2$ ответ отрицательный.

Задача. Рассмотрим систему из трех уравнений:

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1,\ \dot{x}_2 = (\alpha - \gamma)x_2 + \varepsilon x_1 x_3,\ \dot{x}_3 = -\gamma x_3,$$

где $\alpha > \gamma > 0$ и $\varepsilon \neq 0$.

Доказать, что не существует преобразования $H:(x_1,x_2,x_3) \to (y_1,y_2,y_3)$ класса C^1 с невырожденным якобианом, переводящего окрестность точки $(x_1,x_2,x_3)=0$ в окрестность точки $(y_1,y_2,y_3)=0$, при котором данная система переходит в линейную

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1,\ \dot{y}_2 = (\alpha-\gamma)y_2,\ \dot{y}_3 = -\gamma y_3.$$

Если рассматривать топологические, не обязательно принадлежащие классу C^1 преобразования, то справедливо следующее утверждение.

Теорема $1'$**.** Предположим, что спектр ограниченного оператора A не пересекается с мнимой осью, $f(x) \in C^1(X)$, $f(0)=0$ и $(Df)|_{x=0}=0$. Пусть $F(t,x)$ динамическая система, порожденная уравнением (A). Тогда найдется окрестность нуля и гомеоморфизм $h: U \to V$, $h(0)=0$ такой, что $F(t,h(x)) = h(\exp(At)x)$.

Таким образом, топологическая структура множества решений системы (A) в окрестности точки $x = 0$ совпадает со структурой множества решений линеаризованной системы. Однако, это неверно, если спектр A пересекает мнимую ось.

Лемма. Пусть $Y:V \to X$ - векторное поле класса C^r ($r \geq 1$) с $Y(0)$ =0, соответствующее системе А. Пусть A = D(Y(0)). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует C^r- векторное поле $Z: X \to X$ со следующими свойствами:

(1) поле Z удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной K, так что поток, порожденный полем Z, определен на $R \times X$;

(2) $Z = A$ вне шара B_l ;

(3) существует такое открытое множество $U \subset V$, содержащее 0, что $Z = Y$ на U;

(4) если $Z(t,x) = \exp(At)x + \varphi(t,x)$, соответствующий полю Z поток, то существует такое M > 0, что $\|\varphi(t,x)\| \leq M\varphi(1,x)$ при всех $t \in [-2,2]$ и $\varphi(1,x)$ имеет постоянную Липшица, которая не превосходит ε. Кроме того, $\mathrm{D}(\varphi(1,x))|_{x=0} = 0$ или, что эквивалентно, $D(Z(1,x))|_{x=0} = \exp(A) = A_1$.

Доказательство. Так как A = DY(0), имеем $Y = A+f$, где $f:V \to X$ - такое C^r-отображение, что f(0) = 0 и D$f|_{x=0}$= 0. Пусть $\alpha: R \to R$ - такое C^∞ - отображение, что $\alpha(R) \subset [0,1]$, $\alpha(s) = 1$ при $|s| \leq l/2$, $\alpha(s) = 0$ при $|s| \geq l$.

Определим $\psi: X \to X$ формулой $\psi(x) = \alpha(\|x\|)f(x)$, если $x \in V$, и $\psi(x) = 0$, если $x \in X \setminus V$. Для любого $\delta > 0$ можно выбрать такое l > 0, чтобы отображение ψ принадлежало классу C^r ($B_{l/2}$), имело постоянную Липшица, не превосходящую $\delta > 0$. Ясно, что $\psi = f$ на $B_{l/2}$, и $\psi = 0$ вне B_l. Пусть $Z: X \to X$ - векторное поле, задаваемое формулой $Z = A + \psi$. Опять-таки ясно, что Z=Y на $B_{l/2}$, $Z = A$ вне B_l и, что K удовлетворяет условию (1). Остается доказать, что выполняется условие (4). Из неравенства Гронуолла –Беллмана, примененного к оценке равенства

$$Z(t,x) - Z(t,y) = x - y + \int_0^t [Z(Z(s,x)) - Z(Z(s,y))]ds$$

вида $\|Z(t,x) - Z(t,y)\| \leq \|x-y\| + K\int_0^t \|Z(s,x) - Z(s,y)\|ds$, имеем

$$\|Z(t,x) - Z(t,y)\| \leq e^{K|t|}\|x-y\|.$$

В частности, $\|Z(t,x) - Z(t,y)\| \leq e^{2K}\|x-y\|$ $\|Z(t,x) - Z(t,y)\| \leq e^{2K}\|x-y\|$ при всех $t \in [-2,2]$. Положим $\varphi(t,x) = Z(t,x) - \exp(At)x$. Существование такого M, что $\|\varphi(t,x)\| < M$ при $t \in [-2,2]$, следует из того факта, что Z(t,x) и exp(At) ограничены на B_l при $t \in [-2,2]$ и $Z = A$ вне B_l.

Поскольку $\varphi(0,x)=0$ и

$$\dot{\varphi}(t,x)=\dot{Z}(t,x)-A\exp(At)x=(A+\psi)\circ Z(t,x)-A\exp(At)x=$$
$$=A(Z(t,x)-\exp(At)x)+\psi(Z(t,x))=\psi(Z(t,x))+A(\varphi(t,x))$$

имеем $\varphi(t,x)-\varphi(t,y)=\int\limits_0^t \psi(Z(s,x))-\psi(Z(s,y))ds+\int\limits_0^t A(\varphi(s,x)-\varphi(s,y))ds$.

Используя неравенство Гронуолла - Беллмана, мы заключаем, что при $t\in[-2,2]$ выполнено $\|\varphi(t,x)-\varphi(t,y)\|\le 2e^{2K}\delta e^{2\|A\|}\|x-y\|$.

При достаточно малом δ первая часть условия (4) тем самым удовлетворена. Наконец, покажем, что $\mathrm{D}(\varphi(1,x))|_{x=0}=0$. Докажем, что для любого $\rho>0$ существует такое r>0, что $\|\varphi(1,x)\|\le\rho\|x\|$ при $\|x\|\le r$. Поскольку $\mathrm{D}(\psi(x))|_{x=0}=0$, то можно выбрать r таким образом, чтобы $\|\psi(z)\|\le\eta\|z\|$ при $\|z\|<r$, где $\eta<\rho e^{-K-\|A\|}$. Аналогично приведенному выше выражению имеем

$\varphi(1,x)=\int\limits_0^1 \psi(Z(s,x))ds+\int\limits_0^t A(\varphi(s,x))ds$. Используя тот факт, что

$\|Z(s,x)\|\le e^K\|x\|$ при $0\le s\le 1$, получаем из неравенства Гронуолла-Беллмана

$\|\varphi(1,x)\|\le\eta e^K\|x\|e^{\|A\|}\le\rho\|x\|$. Это завершает доказательство леммы .

Доказательство теоремы $1'$. Пусть $Z:X\to X$ - векторное поле класса C^r из леммы . Поскольку Z = Y в окрестности U точки 0, то тождественное отображение переводит Z-траектории в F-траектории. Таким образом, Z локально эквивалентно полю Y. Остается доказать, что Z локально сопряжено с A. Мы покажем, что действительно существует гомеоморфизм многообразия X, сопрягающий потоки $Z(t,x)$ и $\exp(At)x$.

По лемме $Z(t,x)=\exp(At)x+\varphi(t,x)$, и $\mathrm{D}(Z(1,x))|_{x=0}=\exp(A)=A_1$, то диффеоморфизм $Z(1,x)=\exp(A)x+\varphi(1,x)$ имеет точку 0 своей гиперболической неподвижной точкой, а $\varphi(1,x)$ имеет постоянную Липшица, не превосходящую ε. По теореме 1 существует единственный гомеоморфизм $h:V\to V$ ($V\subset X$), удовлетворяющий уравнению $h(Z(1,x))=\exp(A)h(x)$ и имеющий вид

$h=I+u(x)$ ($u(x)$ –непрерывна, u(0)=0).

Определим $H:X\to X$ формулой $H=\int\limits_0^1 \exp(-At)h(Z(t,x))dt$.

Ясно, что H является непрерывным отображением. Покажем теперь, что $H(Z(s,x)) = \exp(As)H(x)$ при всех $s \in R$.

Для этого достаточно рассмотреть $s \in [0,1]$. Имеем

$$\exp(-sA)H(Z(s,x)) =$$

$$= \exp(-sA)\int_0^1 \exp(-At)h(Z(t,Z(s,x)))dt = \int_0^1 \exp(-A(t+s)h(Z(t+s),x))dt.$$

Полагая $t_1 = t+s-1$, получим

$$\int_0^1 \exp(-A(t+s)h(Z(t+s),x))dt = \int_{-1+s}^{s} \exp(-A(t_1+1)h(Z(t_1+1),x))dt_1 =$$

$$= \int_{-1+s}^{0} \exp(-A(t_1)\exp(-A)h(Z(1,Z(t_1,x))dt + \int_0^s \exp(-A(t_1+1)h(Z(t_1+1),x))dt_1.$$

Положив $t_2 = t_1 + 1$ в первом слагаемом и $t_2 = t_1$ во втором и использовав равенство $\exp(-A)h(Z(1,x)) = h(x)$, получим отсюда, что

$$\exp(-sA)H(Z(s,x)) =$$

$$= \int_0^s \exp(-At_2)h(Z(t_2,x))dt_2 + \int_s^1 \exp(-At_2)h(Z(t_2,x))dt_2 = H.$$

Это показывает, что H - непрерывное отображение, сопрягающее потоки $Z(t,x)$ и $\exp(At)$. Остается показат , что H – гомеоморфизм. Действительно, поскольку $\exp(A)H(x)=H(Z(1,x))$ и $h(Z(1,x)) = \exp(A)h(x)$, то единственность решения этого уравнения влечет за собой равенство $H=h$, которое и завершает доказательство теоремы.

В заключение этого параграфа отметим, что общий подход к изучению динамических систем состоит в нахождении и описании типичных и устойчивых явлений. При изучении периодических точек удается получить удовлетворительные ответы на оба поставленных вопроса, так как гиперболические точки оказываются одновременно устойчивыми и типичными. Описание поведения диффеоморфизмов, имеющих периодические точки чисто локально в том смысле, что оно ограничивается локальной окрестностью точки. Поэтому тип устойчивости, соответствующий такому описанию, также носит локальный характер. Основной факт здесь состоит в следующем:

Теорема 3 (локальная устойчивость гиперболических точек). Пусть выполнены предположения теоремы Гробмана - Хартмана, т.е. $F: V \to X$ - диффеоморфизм класса C^1 окрестности нуля в банаховом пространстве, для которого 0 является гиперболической точкой.

Тогда существует окрестность N ($F \in N$) в пространстве $C^1(V, X)$ такая, что любой элемент $G \in N$ локально сопряжен с F, т.е. для некоторых окрестностей U и $W \subset V$ точки 0 в пространстве X найдется гомеоморфизм $h: W \to U$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V \supset W & \xrightarrow{F} & X \supset W \\ h\downarrow & & h\ \downarrow \\ U & \underset{G}{\longrightarrow} & X \supset U \end{array}$$

коммутативна. Кроме того, точка h (0) является гиперболической неподвижной точкой отображения G.

Заметим, что устойчивость гиперболических неподвижных точек, конечно, влечет за собой необходимость включения таких точек в любое полное описание «типичной» структуры траекторий диффеоморфизмов. Теперь мы приведем в некотором смысле обратное утверждение. А именно, в той части, в которой описание типичного поведения траекторий относится к периодическим точкам, можно ограничиться гиперболическими точками.

Теорема 4 (первая часть теоремы Купки — Смейла). Пусть M- гладкое компактное многообразие. Обозначим через H_n множество тех диффеоморфизмов $F \in \mathrm{Diff}^r(M)$, у которых все неподвижные точки отображения F^n гиперболические. Тогда, множество H_n открыто в C^1-топологии и всюду плотно в C^r-топологии (r = 1, 2, . . .), так что множество $H_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n$, состоящее из диффеоморфизмов, у которых все периодические точки гиперболические, является массивным множеством в пространстве $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Итак, при изучении периодических точек, так же как и при изучении диффеоморфизмов окружности, подход, основанный на исследовании типичных свойств, оказывается вполне удовлетворительным. Действительно, теорема Гробмана - Хартмана дает простое описание топологической структуры траекторий в окрестности гиперболической периодической точки, а теоремы 3 и 4 показывают, что гиперболический случай является «общим» с точки зрения типичных свойств диффеоморфизмов.

Более сложный класс диффеоморфизмов с гиперболической структурой представляют диффеоморфизмы Аносова (У-диффеоморфизмы).

Определение 1. Диффеоморфизм $F \in \mathrm{Diff}(M)$ называется У – диффеоморфизмом, если существует разложение касательного расслоения *TM* в (непрерывную) сумму Уитни двух расслоений $TM = E^s \oplus E^u$, причем это разложение инвариантно относительно *DF* и для некоторой римановой метрики $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$ $\left(\|x\| = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j}\right)$ на *TM*- можно указать такие числа *c*>0 и $\lambda > 1$, что при всех $n \in Z_+$

$$\left\|DF^n(u)\right\| \le c\lambda^{-n}\|u\| \qquad \text{при } u \in E^s,$$

$$\left\|DF^n(u)\right\| \ge c\lambda^{n}\|u\| \qquad \text{при } \quad u \in E^u.$$

Если многообразие *M* компактно, то приведенное определение не зависит от римановой метрики (хотя для разных метрик могут, конечно, меняться значения констант числа *c*>0 и $\lambda > 1$).

Пример, принадлежащий Тому, У-диффеоморфизма тора строится следующим образом. Рассмотрим линейное отображения плоскости $L : R^2 \to R^2$, определяемое (2×2)-матрицей, удовлетворяющей условиям:

1) все ее элементы - целые числа;

2) ее определитель равен +1 или –1;

3) ее собственные значения не равны по модулю единице.

Например $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Первое условие означает сохранение целочисленной решетки (так что *L* индуцирует отображение $\tilde{L} : T^2 \to T^2$), второе условие гарантирует, что $\tilde{L}$ - дииффеоморфизм, а третье - это условие гиперболичности. Оказалось, приведенное семейство отображений тора, и вместе с ними У – дифффеоморфизмы обладают рядом замечательных свойств:

1) множество периодических точек диффеоморфизма $\tilde{L}$ всюду плотно в T^2;

2) итерации дииффеоморфизма $\tilde{L}$ обладают свойством перемешивания, а именно, для любых измеримых областей *U* и *V* выполнено

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\rho(\tilde{L}(U) \cap V)}{\rho(U)} = \dfrac{\rho(V)}{\rho(T^2)}$. Здесь ρ мера Лебега;

3) У- диффеоморфизмы структурно устойчивы в C^1 – топологии.

Важным классом потоков с гиперболической структурой являются У-потоки.

Определение 2. Пусть M —компактное гладкое многообразие, v - векторное поле без особых точек на M, а $F(t,x)$ - соответствующий фазовый поток. Предположим, что

1) касательное пространство к M в каждой точке представлено в виде прямой суммы трех подпространств $T_x M = X_x \oplus Y_x \oplus Z_x$;

2) поля плоскостей X, Y, Z непрерывны и инвариантны относительно фазового потока;

3) поле Z порождено полем фазовой скорости;

4) для некоторых положительных констант c и λ и некоторой римановой метрики на M справедливо

$$\left\| DF(t,x)|_{x\in X} \right\| \le ce^{-\lambda t} \text{ при } t>0, \quad \left\| DF(t,x)|_{y\in Y} \right\| \le ce^{\lambda t} \text{ при } t<0.$$

Тогда фазовый поток $F(t,x)$ называется ***У-потоком***, а уравнение $\dot{x} = v(x)$ - ***У-системой***.

Всякий У-поток структурно устойчив, имеет бесконечное множество замкнутых фазовых кривых и обладает свойством перемешивания.

Важным примером У- потока является геодезический поток на многообразии отрицательной кривизны. Именно на римановом многообразии рассматривается подрасслоение касательного расслоения $Q = \{x = (q,p), q \in M, p \in T_q M : \|p\| = 1\}$ в некоторой локальной карте.

Траекториями геодезического потока $F(t,x)$ служат касательные вектора к геодезическим линиям в M. Отдельное преобразование $F(t,x)$ переводит пару (q_0, p_0) в пару $(q_t, p_t) = F(t,x)$, где для получения q_t следует провести геодезическую через q_0 в направлении p_0, и тогда q_t отстоит от q_0 на расстоянии t (вдоль геодезической), а вектор p_t касается этой геодезической в q_t и направлен также как и p_0. Выдающимся достижением Д.В.Аносова, положившему начало “бесконечному” числу работ по теории “хаоса” явилось исследование геодезических потоков на многообразии отрицательной кривизны.

Для многообразий положительной кривизны свойство перемешивания отсутствует. В частности, фазовое пространство геодезического потока на эллипсоиде распадается на инвариантные двумерные торы.

ГЛАВА 9

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД

§ 1. Усреднение на конечном интервале

Рассмотрим в банаховом пространстве X дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x), \qquad (*)$$

содержащее малый параметр ε.

Мы предположим, что на множестве $[0, +\infty) \times B$, где B - некоторый шар в X, функция $f(t,x)$ равномерно ограничена, непрерывна относительно t и удовлетворяет условию Липшица $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le c\|x_1 - x_2\|$ $(x_1, x_2 \in B)$ с постоянной, не зависящей от t при $t \in [0, +\infty)$.

Предположим далее, что при каждом $x \in B$ существует среднее по времени

$$f_0(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x) ds.$$

Тогда наряду с уравнением (*) целесообразно рассматривать уравнение

$$\dot{x} = \varepsilon f_0(x)$$

Очевидно, что и функция $f_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица в B.

Пусть функция $y(t)$ $(0 \le t \le T_0)$ принимает значения из B и удовлетворяет уравнению $\dot{y} = f_0(y)$ $(0 \le t \le T_0)$.

Тогда, как легко видеть, функция $x_0(t, \varepsilon) = y(\varepsilon t)$ (замена времени) будет решением уравнения $\dot{x} = \varepsilon f_0(x)$ на интервале $0 \le t \le \dfrac{T_0}{\varepsilon}$.

Рассмотрим задачу Коши $x(0, \varepsilon) = y(0) = x_0(0, \varepsilon)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. (Боголюбов Н.Н.). Пусть $f(t,x)$ равномерно ограничена, непрерывна относительно t на множестве $[0, +\infty) \times B$, удовлетворяет условию Липшица и при каждом $x \in B$ существует среднее по времени $f_0(x) = \lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(s, x) ds$.

Если $y(t)$ решение уравнения $\dot{y} = f_0(y)$, принимающее на отрезке $[0, T_0]$ значения из B, то для любого $\eta > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

решение $x(t,\varepsilon)$ уравнения (*), удовлетворяющее условию

$x(0,\varepsilon)=y(0)=x_0(0,\varepsilon)$, подчиняется оценке $\|x(t,\varepsilon)-y(\varepsilon t)\|\le\eta$ при $0\le t\le\dfrac{T_0}{\varepsilon}$.

Теорема Боголюбова - следствие одной общей теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра.

С этой целью рассмотрим более общее, чем (*), уравнение

$$\frac{dx}{d\tau}=f(\tau,x,\varepsilon)\qquad(0\le\tau\le T_0\ ,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0)\qquad(**)$$

с функцией $f(\tau,x,\varepsilon)$, удовлетворяющей условию Липшица

$$\|f(\tau,x_1,\varepsilon)-f(\tau,x_2,\varepsilon)\|\le c\|x_1-x_2\|\ (x_1,x_2\in B)$$

и условию $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\tau_0}f(s,x,\varepsilon)ds=\int\limits_0^{\tau_0}f(s,x,0)ds\qquad(0\le\tau_0\le T_0)$,

которое называют условием интегральной непрерывности при $\varepsilon=0$.

Уравнение (**) превращается в (*), если положить

$$f(\tau,x,\varepsilon)=\begin{cases}f(\tau/\varepsilon,x), & \varepsilon>0,\\ f_0(x), & \varepsilon=0,\end{cases}$$

сделав одновременно замену $\tau=\varepsilon t$.

Условие интегральной непрерывности в этом случае выполняется, так как оно

принимает вид $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\tau_0}f(s/\varepsilon,x)ds=\tau_0 f_0(x)$$

или, иначе, $$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\tau_0}\int_0^{\tau_0/\varepsilon}f(s/\varepsilon,x)ds=f_0(x).$$

Лемма 1. Пусть $x(\tau)$ - непрерывная на [0, T_0] функция. Тогда из условия Липшица и интегральной непрерывности следует соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{T_0}f(\tau,x(\tau),\varepsilon)d\tau=\int_0^{T_0}f(\tau,x(\tau),0)d\tau$$

Доказательство. Из интегральной непрерывности следует, что при любых

$\tau_1,\tau_2\in[0,T_0]$ $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau_1}^{\tau_2}f(s,x,\varepsilon)ds=\int_{\tau_1}^{\tau_2}f(s,x,0)ds,$$

и, следовательно, для любых $0\le\tau_0<\tau_1...<\tau_{n-1}<\tau_n=T_0$, $x_k\in B\,(k=0,\dots,n)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f(s,x_k,\varepsilon)ds=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f(s,x_k,0)ds$$

Вводя в рассмотрение ступенчатую функцию $\tilde{x}(\tau)=\sum_{k=1}^{n}x_{k-1}\cdot\chi[\tau_{k-1,}\tau_k)$,

$\chi[\tau_{k-1,}\tau_k)$ -характеристическая функция $[\tau_{k-1,}\tau_k)$

мы сможем записать последнее равенство в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{T_0} f(s,\tilde{x}(\tau),\varepsilon)ds=\int\limits_{0}^{T_0} f(s,\tilde{x}(\tau),0)ds$$

Тем самым лемма доказана для ступенчатых функций. Учитывая равномерную непрерывность функции $x(\tau)$ и возможность ее аппроксимации ступенчатой и условие Липшица лемма доказана.

Лемма 2. Пусть функция $f(\tau,x,\varepsilon)$ определена при $\tau\in[0,T_0], x\in B$, $0\le\varepsilon<\varepsilon_1$ равномерно ограничена при этих значениях переменных, кусочно непрерывна по τ, интегрально непрерывна при $\varepsilon=0$ и удовлетворяет условию Липшица .

Пусть, далее, уравнение $$\frac{dx}{d\tau}=f(\tau,x,\varepsilon) \qquad (**)$$

при $\varepsilon=0$ имеет решение $x(\tau,0)$, удовлетворяющее условию $x(\tau,0)\in B$ при $\tau\in[0,T_0]$.

Тогда для любого $\eta>0$ существует $\varepsilon_0>0\,(0<\varepsilon_0<\varepsilon_1)$ такое, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ решение $x(\tau,\varepsilon)$ уравнения (**), удовлетворяющее условию $x(0,\varepsilon)=x_0(0,0)=x_0$, подчиняется оценке $\|x(\tau,\varepsilon)-x(\tau,0)\|\le\eta$ при $0\le\tau\le T_0$.

Доказательство. Функции $x(\tau,\varepsilon)$ и $x(\tau,0)$ удовлетворяют интегральным уравнениям:

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0+\int\limits_0^{\tau} f(s,x(s,\varepsilon),\varepsilon)ds \text{ и } x(\tau,0)=x_0+\int\limits_0^{\tau} f(s,x(s,0),0)ds.$$

Пользуясь условием Липшица получаем оценку $\|x(\tau,\varepsilon)-x(\tau,0)\|=$

$$=\left\|\int\limits_0^{\tau} f(s,x(s,\varepsilon),\varepsilon)ds-\int\limits_0^{\tau} f(s,x(s,0),0)ds\right\|\le\int\limits_0^{\tau}\|f(s,x(s,\varepsilon)-f(s,x(s,0),\varepsilon\|ds+$$

$$+\left\|\int\limits_0^{\tau}[f(s,x(s,0),\varepsilon)-f(s,x(s,0),0)]ds\right\|\le$$

$$\leq c\int_0^{\tau}\left\|x(s,\varepsilon)-x(s,0)\right\|+\varphi(\varepsilon),$$

где $$\varphi(\varepsilon)=\left\|\int_0^{T_0}[f(s,x(s,0),\varepsilon)-f(s,x(s,0),0)]ds\right\|.$$

На основании неравенства Гронуолла -Беллмана мы можем заключить теперь, что $\left\|x(\tau,\varepsilon)-x(\tau,0)\right\|\leq e^{c\tau}\varphi(\varepsilon)$.

и остается только заметить, что в силу условия интегральной непрерывности и леммы 1 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon)=0$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1 немедленно вытекает из доказанной леммы, как это следует из рассуждений, приведенных в начале параграфа.

§ 2. Функция Грина

9.2.1. Ограниченное решение неоднородного уравнения

Рассмотрим неоднородное уравнение

$\dot{x}=Ax+f(t)$ (*)

с непрерывной функцией $f(t)$.

Предположим, что спектр оператора A распадается на два спектральных множества $\sigma(A)=\sigma_1(A)\cup\sigma_2(A)$. Обозначим через X_1, X_2 - инвариантные подпространства оператора A, соответствующие этим множествам, и через P_1 P_2 - соответствующие спектральные проекторы.

Напомним, что (п.3.1.3.) $P_k=(2\pi i)^{-1}\int_{C_k}R(\lambda,A)d\lambda\in L(X,X)$ (k=1,2)

Введем в рассмотрение ***оператор-функцию Грина***

$$G(t)=\begin{cases}\exp(At)P_1=(2\pi i)^{-1}\int_{C_1}e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda, & t>0,\\ \exp(At)P_2=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2}e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda, & t<0,\end{cases}$$

где $C_k(k=1,2)$ -гладкие жордановы кривые, охватывающие $\sigma_k(A)$.

Она обладает следующими свойствами:

1) При $t \neq 0$ оператор $G(t)$ непрерывно дифференцируем и удовлетворяет однородному уравнению $\dfrac{dG(t)}{dt} = AG(t)$. Этот факт непосредственно следует из определения.

2) Скачок $G(t)$ в нуле равен единичному оператору. Действительно,

$$G(+0)= P_1, \quad G(-0)= -P_2\,, \quad G(+0) -G(-0)= P_1+ P_2 =I$$

3) Функция $x(t) = \int_a^b G(t-s) f(s)ds$, где $f(t)$ непрерывна, удовлетворяет при $a \le t \le b$ неоднородному уравнению.

Для доказательства продифференцируем равенство

$$x(t) = \int_t^b G(t-s) f(s)ds + \int_a^t G(t-s) f(s)ds\,.$$

Получаем
$$\dot{x} = -G(-0) f(t) + \int_t^b \frac{dG(t-s)}{dt} f(s)ds +$$

$$+G(+0) f(t) + \int_a^t \frac{dG(t-s)}{dt} f(s)ds = \int_a^b AG(t-s) f(s)ds +$$

$$+(G(+0) - G(-0)) f(t) = Ax + f(t)\,.$$

В дальнейшем, как правило, будет рассматриваться случай, когда спектр $\sigma(A)$ не пересекается с мнимой осью (в частности, когда оператор A э-дихотомичен): $\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$ и $\exp(A)$ -гиперболичен.

Функцию Грина, определяемую формулой

$$G_A(t) = \begin{cases} \exp(At)P_-, & t > 0, \\ -\exp(At)P_+, & t < 0, \end{cases}$$

назовем главной функцией Грина уравнения (*).

Поскольку спектр $\sigma(A)$ не пересекается с мнимой осью, существуют числа $\alpha > 0$, и K>0, при которых справедлива оценка $\|G(t)\| \le Ke^{-\alpha|t|}$.

Главная функция Грина играет важную роль при выяснении условий существования ограниченного на всей оси решения уравнения (*).

Теорема 1. Для того, чтобы любой ограниченной на всей оси непрерывной вектор-функции $f(t)$ соответствовало одно и только одно ограниченное на всей оси решение уравнения (*), необходимо и достаточно, чтобы спектр $\sigma(A)$ не пересекался с мнимой осью. Это решение дается формулой

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s)\,f(s)ds\,,$$

где $G_A(t)$ - главная функция Грина уравнения (*).

Доказательство. Пусть любой ограниченной непрерывной $f(t)$ соответствует ограниченное решение. Положим $f(t) = y$, где y - постоянный вектор, и пусть $x(t)$ - единственное ограниченное решение уравнения $\dot{x}=Ax+y$.

В связи с автономностью уравнения $x(t+\tau)$ при любом τ также является решением этого уравнения, и в силу единственности $x(t+\tau)$ = $x(t)$, т.е. $x(t) = x$ = const, откуда $Ax = - y$.

Из произвольности y следует, что линейный непрерывный оператор A отображает пространство X на все пространство X. По теореме Банаха такой оператор обладает непрерывным обратным оператором A^{-1}, т.е. точка $\lambda=0$ - является регулярной точкой оператора A.

Пусть теперь βi - произвольное чисто мнимое число. Рассмотрим уравнение $\dot{x}=Ax+ye^{i\beta t}$. Подстановка $x=ze^{i\beta t}$ дает $\dot{z}=(A-\beta iI)z+y$.

Повторяя проведенные выше рассуждения, получим, что оператор $(A-\beta iI)$ имеет непрерывный обратный, т.е. βi - регулярная точка.

Тем самым необходимость условия теоремы доказана. Для доказательства достаточности воспользуемся оценкой $\|G(t)\|\le Ke^{-\alpha|t|}$. Из этой оценки следует, что функция $x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s)\,f(s)ds$ ограничена. Действительно

$$\|x(t)\|\le\int_{-\infty}^{+\infty}\|G_A(t-s)\|\|f(s)\|ds\le\frac{2K}{\alpha}\sup_{-\infty<t<+\infty}\|f(t)\|\ .$$

Тот факт, что эта функция удовлетворяет уравнению (*) при $t\in(-\infty,+\infty)$ был установлен ранее.

Остается показать единственность ограниченного решения. Для этого достаточно проверить, что однородное уравнение $\dot{x}=Ax$ не имеет ограниченных на всей оси решений, отличных от тривиального.

Допустим, что такое решение $x(t) = \exp(At)x_0$ существует. Полагая $A_- = P_-A$, $A_+ = P_+A$, его можно записать в виде $x(t) = \exp(A_-t)P_-x_0 + \exp(A_+t)P_+x_0$

Поскольку спектром оператора A_- в пространстве X^s является множество $\sigma(A)$, лежащее внутри левой полуплоскости, то первое слагаемое ограничено при $t > 0$, а значит, этим свойством обладает и второе слагаемое: $\|\exp(A_+t)P_+x_0\| \le c$.
Но тогда, учитывая тот факт, что спектр $\sigma_+(A)$ оператора A_+ в пространстве X^u (если он не пуст) лежит внутри правой полуплоскости, мы получим
$\|P_+x_0\| = \|\exp(-A_+t)(\exp(A_+t)P_+x_0\| \le Ke^{-\alpha t}$ $(t > 0)$.
Это неравенство при $t \to +\infty$ показывает, что $P_+x_0 = 0$. Аналогично показывается, что и $P_{--}x_0 = 0$. Теорема доказана.

9.2.2. Ограниченное решение квазилинейного уравнения

Теперь рассмотрим поведение решений нелинейного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x),$$

главная часть которого

$$\dot{x} = A(t)x$$

экспоненциально дихотомична. Мы не будем, вообще говоря, предполагать, что $f(t,0) = 0$, и увидим, что свойства уравнения $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ напоминают свойства неоднородного линейного уравнения $\dot{x} = A(t)x + f(t)$.
Функция $f(t,x)$ будет предполагаться непрерывной по t и липшицевой по x
Для некоторого упрощения изложения мы будем рассматривать уравнение более частного вида

$$\dot{x} = Ax + f(t,x) \qquad (**)$$

со стационарной э-дихотомической главной частью, т.е. при том предположении, что $\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$.
Однако нетрудно заметить, что в проводимых ниже доказательствах играет роль лишь наличие у уравнения $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ главной функции Грина, подчиняющейся обычным оценкам.
В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения. Функции $f(t,x)$, определенные и непрерывные на произведении $(-\infty,+\infty) \times B(r)$, где $B(r) = \{x \in X : \|x\| \le r\}$ -замкнутый шар, обозначаем $L(M, q,r)$, если они на указанном множестве подчиняется условиям: $\|f(t,x)\| \le M$ и условию Липшица $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le q\|x_1 - x_2\|$.
Функции, удовлетворяющие описанным условиям при $(t,x) \in (-\infty,+\infty) \times X$ обозачаем $L(M,q)$.

Теорема 2. Пусть оператор A удовлетворяет условию $\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$. Для любого r>0 существуют постоянные M > 0 и q > 0, зависящие только от A и rтакие, что если $f(t,x) \in L(M,q,r)$, то уравнение

$$\dot{x} = Ax + f(t,x)$$

имеет одно и только одно решение $x(t)$, остающееся при всех t в шаре $B(r)$:

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \|x(t)\| \le r$$

Доказательство. Пусть x (t) - какое-нибудь решение уравнения (**), не выходящее из $B(r)$. Тогда функция $f(t,x(t))$ ограничена на всей оси и решение уравнения (**) можно представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s) f(s, x(s)) ds,$$

где $G_A(t)$— главная функция Грина оператора A. Эта функция подчиняется оценке вида $\|G(t)\| \le Ke^{-\alpha|t|}$, где $\alpha > 0$ и K>0, — некоторые положительные постоянные.

Таким образом, рассматриваемое решение уравнения (**) удовлетворяет интегральному уравнению $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s) f(s, x(s)) ds$. Наоборот, каждое решение интегрального уравнения, не выходящее из $B(r)$, на основании той же теоремы 1 удовлетворяет уравнению (**).

Итак, при рассмотрении решений $x(t)$, определенных на всей оси и не выходящих из $B(r)$, интегральное уравнение и уравнение (**) можно считать эквивалентными. Для доказательства существования и единственности решения интегрального уравнения рассмотрим шар $\tilde{B}(r)$ пространства $C(R,X)$ состоящий из функций $x(t)$ ($-\infty < t < +\infty$), удовлетворяющих условию

$$\|\|x(t)\|\| \sup_{-\infty<t<\infty} \|x(t)\| \le r.$$

При достаточно малом M > 0 преобразование

$$y(t) = (Fx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_A(t-s) f(s, x(s)) ds$$

действует в шаре $\tilde{B}(r)$ и является сжатием, если r достаточно мало.

Действительно, для $x(t) \in \tilde{B}(r)$ $\qquad \|\| f(\cdot, x(\cdot)\|\| \le M$

и потому $$\|y\| \le M \int_{-\infty}^{\infty} \|G_A(s)\| ds \le M \frac{2K}{\alpha} \le r,$$

если $M \le \dfrac{r\alpha}{2K}$.

Далее, $$\|Fx_2 - Fx_1\| \le q \sup_{-\infty<t<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|G_A(t-s)\| \|x_2(s) - x_1(s)\| ds \le$$
$$\le \frac{q2K}{\alpha} \|x_2 - x_1\|.$$

Если $q \le \dfrac{\alpha}{2K}$, то F является сжатием. На основании принципа сжатых отображений мы заключаем, что существует одно и только одно решение интегрального уравнения, а значит, и уравнения (**) в шаре $B(r)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если выполняется условие $f(t, 0) = 0$ и, следовательно, имеет место оценка $\| f(t,x)\| \le q\|x\|$, то единственным ограниченным на оси решением уравнения (**) является тривиальное решение. Любое другое решение выходит из каждого шара $B(r_1)$ $(r_1 < r)$ либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

Замечание 2. Результат теоремы 2 дословно переносится на уравнение $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$, если уравнение $\dot{x} = A(t)x$ э-дихотомично.

§ 3. Вторая теорема Боголюбова.

В этом пункте рассмотрим систему типа расширения , фазовым пространством которой является $E = M \times X$, где M – бикомпактное метрическое пространство с мерой, и в пространстве M действует строго эргодический поток $F: R \times M \to M$, X - банахово пространство. Таким образом, рассматривается система

$$F(t,\theta): R \times M \to M, \qquad \theta \in M,$$
$$\dot{x} = \varepsilon f(F(t,\theta), x), \qquad x \in X, \quad (*)$$

$F(t,\theta)$ - строго эргодическиий поток на бикомпактном метрическом пространстве M. Вместе с непрерывным отображением $f: M \times X \to X$ рассмотрим отображение $f_0: X \to X$, где $f_0(x) = \int_M f(\theta, x) d\mu(\theta)$, ($\mu(\theta)$ - единственная инвариантная относительно потока $F(t,\theta)$ бэровская мера) -

$$f_0(x) = \int\limits_M f(\theta, x)d\mu(\theta).$$

Относительно отображения $f_0(x)$ будем предполагать, не ограничивая общности дальнейших рассуждений, с учетом теоремы 2 (п.9.2.1), что $f_0(0)=0$ и отображение $A = Df_0|_{x=0}$ э– дихотомично. Таким образом, вместе с системой (*) можно рассматривать распавшуюся систему

$$F(t,\theta): R \times M \to M, \qquad \theta \in M,$$
$$\dot{x} = \varepsilon f_0(x), \qquad x \in X,$$

Мы увидим, что при некоторых предположениях и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $\Gamma: M \to X$ ($\|\Gamma(\theta)\| \le \varepsilon$) график которого (множество точек $(\theta, \Gamma(\theta)) \in E$) инвариантен относительно системы(*). Потребуем выполнения следующих условий:

I) Функция $f(\theta, x)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена при $\theta \in M$, $x \in B(r)$, где $B(r)$ - шар с центром в точке 0 некоторого радиуса r.

Предел $$f_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(F(s,\theta),x)ds = \int\limits_M f(\theta,x)d\mu(\theta)$$

существует равномерно относительно $\theta \in M$, и $x \in B(r)$, причем $D_x(f_0(x))$ и $D_x^2(f(\theta,x)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены при $\theta \in M$ и $x \in B(r)$.

II) Функции $f_0(x) \in C^2(X)$, $f(\theta,x)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x, причем $D_x(f(\theta,x))$ и $D_x^2(f(\theta,x))$ непрерывно зависят $\theta \in M$ при $x \in B(r)$.

III) Соотношение $f_0(x) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(F(s,\theta),x)ds = \int\limits_M f(\theta,x)d\mu(\theta)$ можно дважды почленно дифференцировать по переменной x, т.е. равномерно относительно $\theta \in M$ и $x \in B(r)$, справедливо соотношение

$$D_x^k(f_0(x)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T D_x^k(f(F(s,\theta)),x)ds = \int\limits_M D_x^k(f(\theta,x))d\mu(\theta) \quad (k=1,2).$$

IV) Функция $f(x)$ такова, что $f_0(0)=0$, и спектр ограниченного оператора $A = Df_0|_{x=0}$ не пересекает мнимой оси.

Сделанные предположения позволяют фиксировать произвольную точку $\theta \in M$ и рассматривать $f(t,x) = f(F(t,\theta),x)$. Единственность полученного решения и бикомпактность M гарантируют существование $\Gamma : M \to X$.
Представим $f_0(x)$ в виде $f_0(x) = Ax + R(x)$, где $\|R(x)\| = o(\|x\|)$.

Отметим, что в силу $f_0(x) \in C^2(X)$ при $x_1, x_2 \in B(r)$ выполнено условие Липшица $\|R(x_1) - R(x_2)\| \le K_r \|x_1 - x_2\|$, где $\lim\limits_{r \downarrow 0} K_r = 0$.

Уравнение $\dot{x} = \varepsilon f(t,x) = \varepsilon f(F(t,\theta),x)$ запишем в виде, допускающем применение результатов § 2.

Прежде всего его можно переписать в виде $\dot{x} = \varepsilon Ax + \varepsilon \tilde{f}(t,x)$,
где $\tilde{f}(t,x,\theta) = f(F(t,\theta),x) - f_0(x) + R(x)$.
В полученном уравнении произведем замену $x = z - \varepsilon v(t,z,\varepsilon,\theta)$, где

$$v(t,z,\varepsilon,\theta) = \int_0^\infty V(t+s,z,\theta)e^{-\varepsilon s}ds \quad (\varepsilon > 0)$$

- преобразование Лапласа функции $V(t,z,\theta) = f(F(t,\theta),z) - f_0(z)$.

Для того, чтобы показать, что преобразование $x = z - \varepsilon v(t,z,\varepsilon,\theta)$ обратимо, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. Пусть функция $\varphi(s,\lambda)$ $(0 \le s < \infty)$, принимающая значения из банахова пространства X и зависящая от параметра $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяет условиям $M = \sup\left\{ \left\| \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s,\lambda)ds \right\| \ (t \ge 0); \lambda \in \Delta \right\} < \infty$

и равномерно относительно $\lambda \in \Lambda$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(s,\lambda)ds = 0.$$

Тогда равномерно относительно $\lambda \in \Lambda$ справедливо соотношение

$$\lim_{p \to 0} p\int_0^\infty \varphi(s,\lambda)e^{-ps}ds = 0.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем соотношение

$$p\int_0^\infty \varphi(s,\lambda)e^{-ps}ds = p\int_0^\infty d(\int_0^s \varphi(t,\lambda)dt)e^{-ps}ds =$$

$$p\left\{\left(se^{-ps}\frac{1}{s}\int_0^s \varphi(t,\lambda)dt\right)_{s=0}^{s=\infty} + p\int_0^\infty \left|\int_0^s \varphi(t,\lambda)dt\right| e^{-ps}ds\right\} =$$

$$= p^2\int_0^\infty \left(\int_0^s \varphi(t,\lambda)dt\right) e^{-ps}ds\,.$$

Для любого $\delta > 0$ найдется $T > 0$ такое, что при $s \geq T$ выполнено

$$\left\|\frac{1}{s}\int_0^s \varphi(s,\lambda)ds\right\| \leq \delta\,.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\left\|p\int_0^\infty \varphi(s,\lambda)e^{-ps}ds\right\| \leq \left\|p^2\int_0^T s\left(\frac{1}{s}\int_0^s \varphi(t,\lambda)dt\right)e^{-ps}ds + \int_T^\infty \left(\frac{1}{s}\int_0^s \varphi(t,\lambda)dt\right)se^{-ps}ds\right\| \leq$$

$$\leq M(1-e^{-pT}(1+pT)) + \delta e^{-pT}(1+pT)\,,$$

которая в силу произвольности $\delta > 0$ доказывает требуемое утверждение.

Лемма 2. Равномерно относительно $t \in (-\infty,+\infty)$, $z \in B(r)$, $\theta \in M$ выполняются соотношения $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon v(t,z,\varepsilon,\theta) = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon D_z(v(t,z,\varepsilon,\theta)) = 0$.

Действительно, в силу условий I)-III) ограниченные функции $V(s+t,z,\theta)$ и $D_z(V(s+t,z,\theta))$ удовлетворяют условиям леммы 2, причем роль параметра λ играют тройки (t, z,θ).

Таким образом, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ оператор $I - \varepsilon D_z(v(t,z,\varepsilon,\theta)$ ($t \in (-\infty,+\infty)$, $z \in B(r)$, $\theta \in M$) имеет ограниченный обратный, и, следовательно, по теореме об обратной функции отображение $x = z - \varepsilon v(t,z,\varepsilon,\theta)$ обратимо.

При этом для любого заранее заданного $r_0 \in (0,r]$ можно найти такие $\varepsilon_0 > 0$ и $\eta > 0$, что из соотношений $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\|z\| < \eta$ следует, что $\|x\| < r_0$. Таким образом, в достаточно малой окрестности нуля и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ мы можем произвести замену $x = z - \varepsilon v(t,z,\varepsilon,\theta)$.

Представляя функцию v в виде $v(t,z,\varepsilon,\theta) = e^{\varepsilon t}\int_0^\infty V(s,z,\theta)e^{-\varepsilon s}ds$ мы найдем,

что
$$\frac{dv(t,z,\varepsilon,\theta)}{dt} = \varepsilon v(t,z,\varepsilon,\theta) - V(t,z,\theta)$$

и, следовательно, $\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} - \varepsilon D_z v \frac{dz}{dt} - \varepsilon^2 v + \varepsilon V$

Используя полученные соотношения, мы приведем уравнение

$$\dot{x} = \varepsilon A x + \varepsilon \tilde{f}(t, x, \theta)$$

к виду $$(I - \varepsilon D_z v)\frac{dz}{dt} = \varepsilon(f(F(t,\theta), x, \varepsilon) - f(F(t,\theta), z, \varepsilon)) +$$

$$+\varepsilon f_0(z) + \varepsilon^2 v(t, z, \varepsilon, \theta) =$$

$$= \varepsilon A z + R(z) + \varepsilon^2 v(t, z, \varepsilon, \theta) + \varepsilon(f(F(t,\theta), z - \varepsilon v, \varepsilon) - f(F(t,\theta), z, \varepsilon)),$$

или, после умножения на ограниченный оператор $(I - \varepsilon D_z v)^{-1}$ и введения в качестве независимой переменной «медленного» времени $\tau = \varepsilon t$, к виду

$$F(\tau,\theta) : R \times M \to M$$

$$\frac{dz}{d\tau} = A z + g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon),$$

где, как легко видеть, $g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon)$ имеет ограниченный первый дифференциал $D_z g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon)$ и при этом равномерно по $\tau \in (-\infty, \infty)$, $z \in B(r)$ и $\theta \in M$

$$\| g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon) - R(z) \| = O(\varepsilon).$$

Поэтому для любых $N > 0$ и $K > 0$ существуют такие ε_0 и r_0, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\|z\| < r_0$ выполняются оценки $\| g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon) \| \le N$ и $\| g(F(\tau,\theta), z_1, \varepsilon) - g(F(\tau,\theta), z_2, \varepsilon) \| \le K_r \| z_1 - z_2 \|$.

Напомним, что $\lim\limits_{r \downarrow 0} K_r = 0$.

В силу теоремы 2 п. 9.2.1. можно сделать вывод о существовании при достаточно малом $r_0 > 0$ такого $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ уравнение $\frac{dz}{d\tau} = A z + g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon)$ имеет единственное решение $z_0(\tau,\theta)$ ($\tau \in (-\infty, +\infty)$, $\theta \in M$), траектория которого целиком лежит в шаре $\| z_0(\tau,\theta) \| \le r_0$.

В силу единственности и непрерывной зависимости от параметра в принципе сжатых отображений и условий I)- IV) $z_0(\tau,\theta)$ непрерывно зависит на любом конечном отрезке времени и от $\theta \in M$.

Таким образом, существует гомеоморфизм $h_1 : M \times X \to M \times X$, переводящий точки $(\theta, x) \to (\theta, 0)$, $x \in \Gamma(\theta)$ - вложению бикомпактного метрического пространства *M,* инвариантному относительно расширения, соответствующего потоку порожденному системой

$$F(\tau,\theta): R\times M \to M \;,$$

$$\frac{dz}{d\tau} = Az + g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon)\,.$$

Рассмотрим банахово пространство непрерывных отображений $C(M,X)$ $u: M \to X$ с нормой $\|u\| = \sup\limits_{\theta\in M}(\|u(\theta)\|)$. Так как оператор *A* э- дихотомичен, то с учетом гомеоморфизма h_1 мы находимся в условиях теоремы Гробмана – Хартмана, и потому существуют начальные многообразия $\tilde{X}^s(\theta)$ и $\tilde{X}^u(\theta)$, взаимно однозначно проектирующееся на окрестность нуля в подпространствах $X^s = P_{-A}X$ и $X^u = P_{+A}X$ ($P_{\pm}(A)$ - спектральные проекторы оператора *A*, $X = X^s \oplus X^u$) такие, что при $z(\tau_0,\theta)\in \tilde{X}^s$ соответствующее решение $z(\tau,\theta)$ уравнения $\dfrac{dz}{d\tau} = Az + g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon)$ удовлетворяет условию

$$\|z(\tau,\theta) - z_0(\tau,\theta)\| \le ce^{-\alpha(\tau-\tau_0)}\|z(\tau_0,\theta) - z_0(\tau_0, z(\tau,\theta))\|,$$

$(\tau \ge \tau_0,\ z(\tau_0,\theta)\in \tilde{X}^s(\tau_0,\theta),\ z_0(\tau_0,\theta)\in X^s)$.

При $z(\tau_0,\theta)\in \tilde{X}^u$ соответствующее решение $z(\tau,\theta)$ уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = Az + g(F(\tau,\theta), z, \varepsilon)$$

удовлетворяет условию

$$\|z(\tau,\theta) - z_0(\tau,\theta)\| \le ce^{\alpha(\tau-\tau_0)}\|z(\tau_0,\theta) - z_0(\tau_0,\theta)\|,$$

$(\tau \le \tau_0,\ z(\tau_0,\theta)\in \tilde{X}^u(\tau_0,\theta),\ z_0(\tau_0,\theta)\in X^u)$.

Теорема. (Боголюбов) Пусть для системы

$$F(t,\theta): R\times M \to M\,, \qquad \theta\in M\,,$$
$$\dot{x} = \varepsilon f(F(t,\theta), x)\,, \qquad x\in X\,, \qquad (*)$$

где $F(t,\theta)$ - строго эргодический поток на бикомпактном метрическом пространстве *M,* выполняются условия I) – IV).

Тогда при достаточно малом r_0>0 существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ найдется непрерывное отображение $\Gamma_\varepsilon : M \to X$ ($\|\Gamma_\varepsilon(\theta)\| \le r_0$), график которого инвариантен для системы (*).

Кроме того, существуют гомеоморфизмы $h_\theta : X(\theta)\to X(\theta)$, $((\theta,x)\to(\theta,h_\theta(x)))$ и определенные в окрестности 0 пространства X такие, что поток

$H(t,(\theta,x))=(F(t,\theta),H_{\theta}(t,x))$, где $H_{\theta}(t,x): X_{\theta} \to X_{F(t,\theta)}$, соответствующий системе (*) топологически эквивалентен потоку, порожденному системой

$$F(t,\theta): R \times M \to M\,, \qquad \theta \in M\,,$$

$$\dot{x} = \varepsilon(D(f_0(x))|_{x=0})x\,, \qquad x \in X\,.$$

Теорема доказана предыдущими рассуждениями.

Литература.

1. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ, Харьков, 1939, 719 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний. Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1959, 916 с.
3. Аносов Д. В., Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны. Тр. Мат. ин-та, 1967, 90, 212 с.
4. Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1979, 504 с.
6. Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: 1950, 436 с.
7. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970, 534 с.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962, 895 с.
9. Корнфельд И. П., Синай Я.Г., Фомин С.В., Эргодическая теория. М.: Наука, 1980, 384 с.
10. Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений. ИЛ, 1961, 388 с.
11. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ГТТИ, 1950, 471 с.
12. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л. 1949., 550 с.
13. Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975, 302 с.
14. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970, 279 с.
15. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961, 312 с.
16. Пуанкаре А., Окривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ГИТЛ, 1947, 392 с.
17. Риман Р., Сочинения, 1948, 543 с.

18. Самойленко А.М., Элементы математической теории многчастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987, 301 с.
19. Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии. М. Мир, 1970, 410 с.
20. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Мир, 1970, 720 с.

Работа выполнена в
Институте механики НАН Украины.